

Peruskoulun matematiikkakilpailu Loppukilpailu perjantaina 6.2.2009



OSA 1 Ratkaisuaika 30 min Pistemäärä 20

Tässä osassa ei käytetä laskinta.

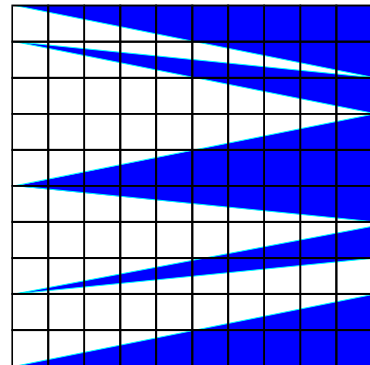
Kaikkiin tehtäviin laskuja tai perusteluja näkyviin, ellei muuta ole mainittu.

1. Laske. Pelkkä vastaus riittää.

a. $0,1 + 0,01 + 0,001 + \dots + 0, \underbrace{000\ 000 \dots 000}_{96 \text{ nollaa}} 001$

b. $0,1 \cdot 0,01 \cdot 0,001 \cdot \dots \cdot 0,000\ 000\ 001$

2. Kuinka suuri osa kuvioista on tummennettu?



3. Ruudukon jokaisella pysty- ja vaakarivillä saa olla luvut 1, 2, 3 ja 4 vain kerran.
Mikä luku on x ?

			1
	2		
		x	
1			4

4. Etsi kuusi ehdon

$$4 < |x| + |y + \frac{1}{2}| < 5$$

täyttävää koordinaatiston kokonaislukupistettä (x, y) . Pelkkä vastaus riittää.

KÄÄNNÄ!

5. Kahden luvun neliöiden summa on ykkösen verran suurempi kuin näiden lukujen summan neliö. Kuinka suuri on näiden lukujen tulo?
6. Laske $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \dots + \frac{1}{2048}$
7. Kirjaston lukusalissa on kolmijalkaisia jakkaroita ja nelijalkaisia tuoleja. Kaikilla niistä istuu joku eikä kukaan seiso salissa. Salissa on yhteensä 39 jalkaa. Kuinka monta jakkaraa, tuolia ja ihmistä salissa on?
8. Potenssi 2009^{2009} kerrotaan auki yhdeksi luvuksi. Mikä on ykkösten numero?
9. Isoympyräksi sanotaan sellaista pallon pinnalle piirrettyä ympyrää, jonka keskipiste on pallon keskipisteessä. Piirretään kolme isoympyrää, jotka kaikki kolme eivät leikkaa toisiaan samassa pisteessä. Kuinka moneen alueeseen ne jakavat pallon pinnan?
10. Seuraavassa on esimerkki matriisien tulosta:

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 7 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laske edellisen perusteella luvut a ja b :

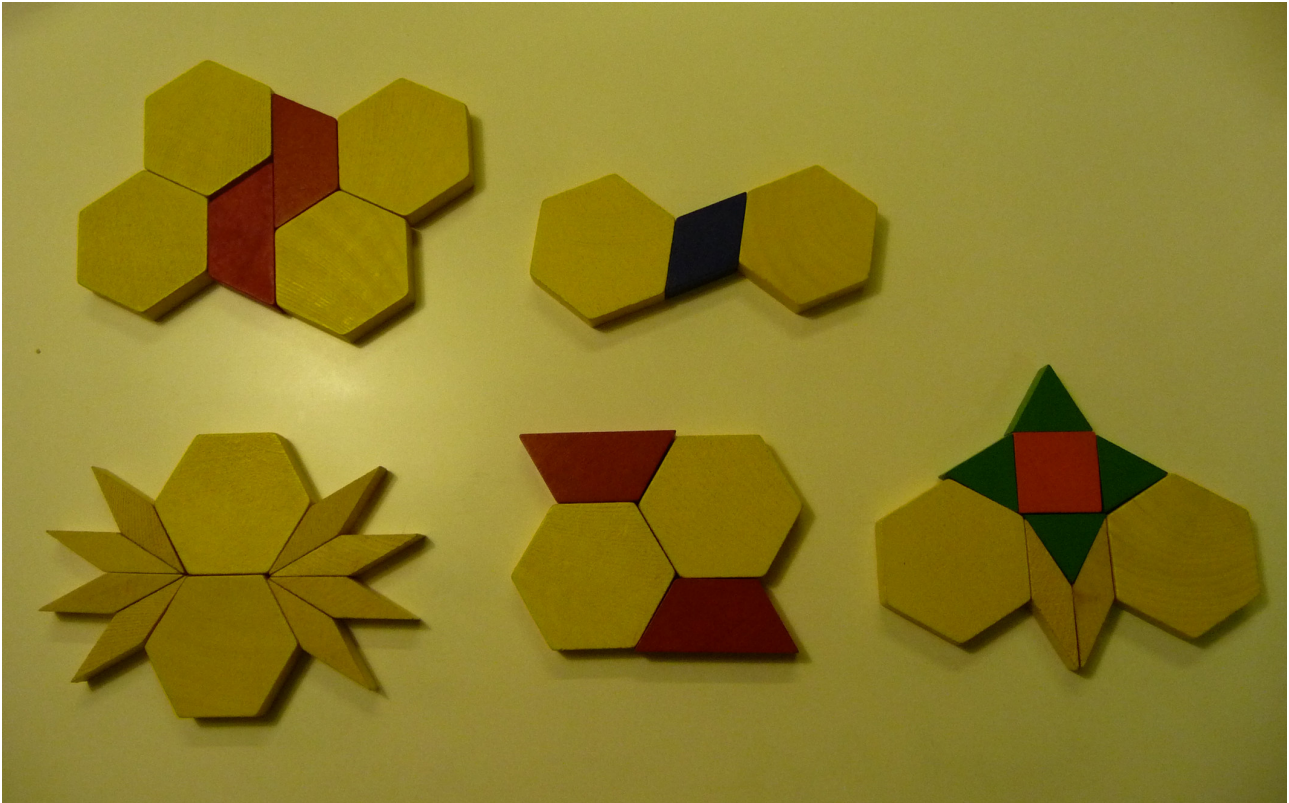
$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & -7 \\ -2 & b \end{bmatrix}$$

Peruskoulun matematiikkakilpailu Loppukilpailu perjantaina 6.2.2009



OSA 2 Ratkaisuaika 45 min Pistemäärä 20

Palikkasarjassa on kuudenlaisia palikoita: tasasivuinen kolmio, neliö, säännöllinen kuusikulmio ja kolme erilaista kuvan mukaista epäsäännöllistä nelikulmiota. Olkoon pituusyksikkönä neliön sivun pituus ja pinta-alayksikkönä neliön pinta-ala.



1. Onko kuvassa esiintyvien asetelmien perusteella mahdollista päätellä yksikäsitteisesti epäsäännöllisen nelikulmion muotoisten palikoiden muoto ja koko? Määritä kunkin epäsäännöllisen palikan sivujen pituus, kulmien suuruus ja pinta-ala, jos se on mielestäsi mahdollista. Kielteisessä tapauksessa perustele, miksi määrittäminen ei ole mahdollista.
2. Muodosta neliöpalikoista isompia neliöitä.
 - a) Millaisen lukujonon neliöiden pinta-alat muodostavat?
 - b) Kuinka monta perusalikkaa tarvitaan neliöön, jonka sivun pituus on n ?
3. Muodosta erikokoisia tasasivuisia kolmioita tasasivuisista kolmioista ja perusalikoiden kanssa yhdenmuotoisia puolisuunnikkaita puolisuunnikkaita.
 - a) Millaisen lukujonon perusalikoiden määrät muodostavat kummassakin tapauksessa?
 - b) Ilmoita kummassakin tapauksessa, mikä on jonon n :s jäsen?

KÄÄNNÄ!

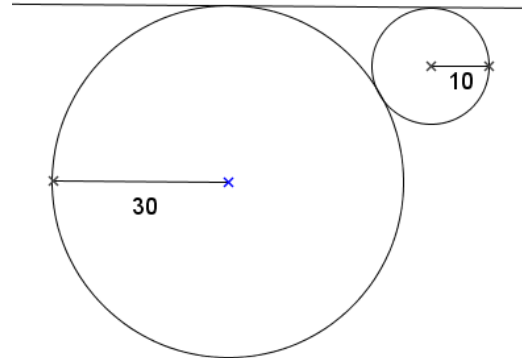
4. Voiko palikoista muodostaa muita säännöllisiä monikulmioita kuin tasasivuisia kolmioita ja neliöitä, jos saa käyttää kaikkia peruspalikoita.
- Perustele, mitä kuvioita voi muodostaa ja mitä ei.
 - Rakenna a-kohdassa mahdolliseksi toteamasi monikulmiot pienimmästä mahdollisesta määrästä peruspalikoita. Piirrä kuva tai luettele palikat.
5. Neliö, jonka sivun pituus on $n = 1, 2, 3, 4$, peitetään mahdollisimman tarkkaan tällaisilla palikoilla. Kaikkia muita peruspalikoita saa käyttää paitsi neliöitä. Kunkin käytettävän palikan pitää olla kokonaan neliön sisällä. Mistä neliöstä voidaan peittää suhteellisesti vähiten ja mistä eniten? Piirrä myös käyttämäsi peitot. Tuloksen saa laskea käyttäen likiarvoja.

Peruskoulun matematiikkakilpailu Loppukilpailu perjantaina 6.2.2009



OSA 3 Ratkaisuaika 60 min Pistemäärä 30

1. Ympyröiden säteet ovat 10 ja 30 (pituusyksikköä). Ympyrät sivuavat toisiaan ja niillä on yhteinen tangentti. Kuinka suuri on ympyröiden ja tangentin rajoittaman kuvion pinta-ala?



2. Kaksi erisäteistä ympyrää eivät leikkaa eivätkä ole sisäkkäin. Etsi harppia ja viivainta käyttäen piste, joka on yhtä kaukana kummankin ympyrän kehästä. Määritä ainakin kolme ratkaisua. Piirrä selkeä kuva ja jätä se näkyviin sekä selitä lyhyesti ratkaisusi. Viivaimen mitta-asteikkoa ei saa käyttää.

3. Lukujono

$$1 + \frac{1}{1}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}, 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1}}}}}, \dots$$

johtaa ketjumurtolukuun

$$1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}}}} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2},$$

kun sitä jatketaan rajatta. Mikä on tämän lukujonon kymmenes jäsen sievennettynä?

4. Ruutupaperille piirretään kolmio siten, että kaksi sivua ovat $\sqrt{2}$ ja $\sqrt{5}$ sekä kärkipisteet ruutuneliöiden kärkipisteissä. Piirrä kuvio. Kuinka suuri on sen pinta-ala? Pituusyksikkönä on ruudun sivu.

KÄÄNNÄ!

5. Kuution sisällä on oktaedri, jonka kärjet ovat kuution tahkojen keskipisteissä. Mikä on kuution ja oktaedrin tilavuuksien suhde?

