Финал математической олимпиады
Средняя школа (9 класс)
Пятница, 4.2.2011

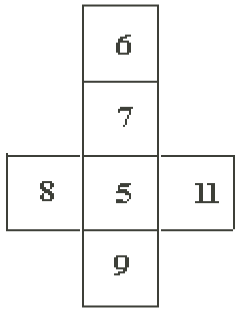
ЧАСТЬ 1 Время для решения 30 минут Максимальное количество баллов 20

Использование калькулятора не разрешается. Объясни свое решение с помощью вычислений, схемы, рисунка, хода рассуждений.
Задачи 1-4 оцениваются до 2 баллов, задачи 5-8 – до 3 баллов.

1. Стороны прямоугольника равны 1 и 2 (единицы длины). Раздели его на части из которых можно сложить квадрат. Нарисуй свое решение.

2. Рассчитай углы пятиугольника, если известно, что они являются последовательными целыми числами.

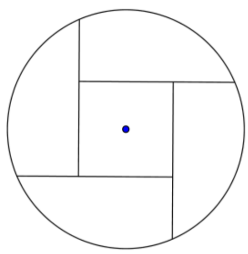
3. На рисунке изображена развёртка куба. Какое самое большое число можно получить перемножением чисел на гранях у одной вершины?



4. Числа от 1 до 20 записаны подряд без промежутков:
1234567891011121314151617181920.
Зачеркни 21 цифру так, чтобы оставшиеся цифры составляли наибольшее возможное число. Какое это число? Переставлять цифры местами не разрешается.

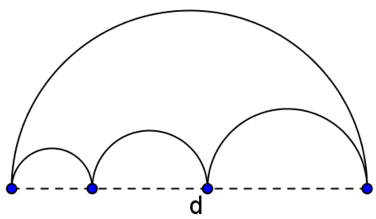
5. Олли записал некоторое трехзначное число, затем записал сумму его цифр, и снова записал сумму цифр уже получившегося числа. Все три числа можно записать следующим образом (разным цифрам соответствуют разные знаки):
◇○◇ ○△ ○
Какие числа записал Олли?

6. Радиус окружности 10 (единиц длины). Окружность разделили на 5 равных по площади частей, одна из которых квадрат (см. рисунок). Вычисли длину стороны квадрата с точностью до целых.



7. Вырази **a : c**, если **a : b = 3 : 4** и **a : (b + c) = 2 : 5.**

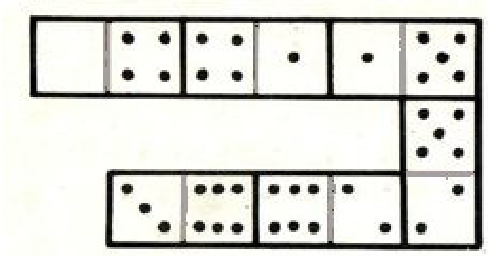
8. Каков периметр фигуры, образованной из полуокружностей (см.рисунок)? (d – диаметр бОльшей окружности, на рисунке помечен пунктирной линией)



Финал математической олимпиады
Средняя школа (9 класс)
пятница, 4.2.2011

ЧАСТЬ 2 **Время для решения 45 минут** **Максимальное количество баллов 20**

Костяшка *домино – это прямоугольник, состоящий из двух квадратов, на которых изображены точки, по которым считают очки. Обычно количество точек от 0 до 6. В этом случае* ***набор*** *состоит из костяшек: 00, 01, 11, 02, 12, 22, 03, ..., 56, 66, то есть наименьшее количество точек на половинке костяшки 0 и наибольшее 6 и в наборе нет одинаковых костяшек. Существуют также наборы с точками от 0 до 9.*



В заданиях используется ***особое правило****: костяшки устанавливаются одна за другой так, чтобы начало следующей совпадало с концом предыдущей и ряд выставляется только в одну сторону. На рисунке использован набор, в котором количество точек от 0 до 6. Если начать с левого верхнего угла, то первая костяшка – 04. Весь ряд можно записать так: 04-41-15-52-26-63.* ***Длина ряда*** *на рисунке 6 костяшек. В этом примере использовано также* ***дополнительное условие*** *– сумма очков на каждой следующей костяшке растет на единицу.*

1. Используется набор домино с количеством точек от 0 до 6. Правило установки костяшек в силе. Запиши получающиеся ряды.

   a) Какой максимальной длины получится ряд, если начать с костяшки 23, и сумма очков на костяшках растет на 2?
   b) Сделай ряд максимальной длины, если сумма очков на костяшках должна увеличиваться на три. Начальную костяшку можешь выбрать.
   c) Сделай ряд максимальной длины. Можешь выбрать начальную костяшку и шаг, на который будет увеличиваться сумма очков.

(3 балла)

2. Какова максимальная длина ряда, если можно выбрать начальную костяшку, шаг, на который увеличивается сумма очков, и используется набор с количеством точек от 0 до 9? Запиши получившийся ряд.

(2 балла)

ПЕРЕВЕРНИ!

3. Сколько костяшек в наборе, если количество точек

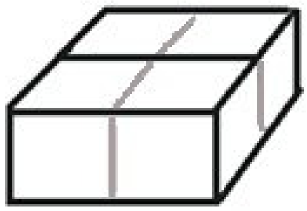
a) от 0 до 9

b) от 0 до n?

(2 балла)

В следующих заданиях используется набор с количеством точек от 0 до 6. Правило установки не действует.

4. Боковые грани прямоугольного параллелепипеда составлены из одной костяшки каждая, а верхняя и нижняя грани - из двух костяшек (см. рисунок). Сумма очков на всех гранях одинакова.

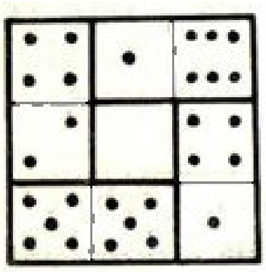


a) Какова может быть сумма очков на одной грани?

b) Сколькими разными способами можно сделать верхнюю грань? Запиши все варианты.

(5 баллов)

5. Четыре костяшки домино выбраются так, чтобы из них можно было составить квадрат с равной суммой очков на каждой стороне. На образце, представленном на рисунке, сумма очков на каждой стороне квадрата равна 11.



Сделай из одного набора домино как можно больше таких квадратов. Сумма очков на сторонах разных квадратов может быть разной. Требуется единственно, чтобы на сторонах одного квадрата сумма очков была одинаковая.

Квадрат, изображенный на рисуке, не обязательно является частью решения.

(6 баллов)

Финал математической олимпиады
Средняя школа (9 класс)
Пятница, 4.2.2011

ЧАСТЬ 3. **Время для решения 45 минут**

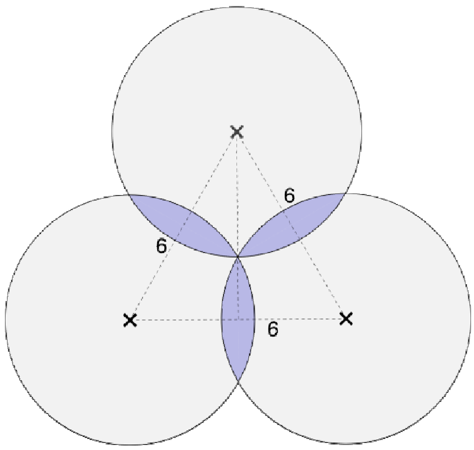
В решениях должны быть представлены все расчеты и обоснования.
Каждая задача – максимум 6 баллов

1. Марта, Вилле и Теппо, каждый владеет двумя профессиями, которыми не владеют остальные. Их профессии: писатель, архитектор, учитель, врач, юрист и художник. В каждом из следующих утверждений упомянутые специальности относятся к разным людям.

   1) Марта ходила кататься на лыжах вместе с писателем и учителем.
   2) Врач попросил художника нарисовать его портрет.
   3) У врача и учителя была общая встреча.
   4) Художник и архитектор – родственники.
   5) Теппо выйграл в шахматы у Вилле и у художника.
   6) Вилле живет по-соседству с писателем.

   Кто какими профессиями владеет?

2. Три башни сотовой связи расположены на расстоянии 6 км друг от друга. Сигнал от каждой башни покрывает область, имеющую форму круга радиусом примерно 3,5 км. Область, в которой есть сигнал от трех башен, сливается в точку. Вычисли площадь области, где есть сигнал от двух башен.



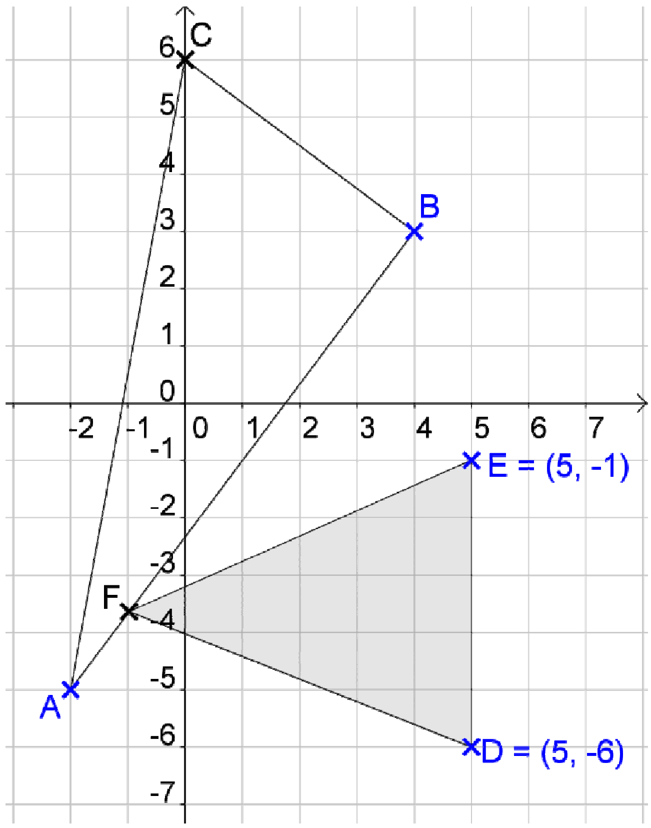
3. Вычисли значение выражения

$$(a+b)(a^2+b^2)(a^4+b^4)\dots.(a^{2^n}+b^{2^n})$$

при a=10, b=1 и n=5.

ПЕРЕВЕРНИ!

4. Вершины D и E треугольника DEF зафиксированы, а вершина F находится на стороне треугольника ABC. Начерти в выбранной тобой системе координат функцию зависимости площади треугольника DEF от пути пройденного вершиной F по периметру треугольника ABC против часовой стрелки , начиная с точки A.



5. Палиндром это положительное число, которое при чтении слева направо и справа налево дает одинаковый результат. Например, числа 5, 232, 4428244 – палиндромы.

a) Определи количество семизначных палиндромов.

b) Если семизначные палиндромы записать в порядке возрастания, то каким числом в этом списке будет 2125-й палиндром.