

OSA 1

1. Mikä on suurin kokonaisluku, joka toteuttaa seuraavat ehdot?
Se on suurempi kuin 100.
Se on pienempi kuin 200.
Kun se pyöristetään satojen tarkkuuteen,
se on 20 suurempi kuin jos se pyöristetään kymmenten tarkkuuteen.
vastaus: 184
 $184 \approx 180, 184 \approx 200, 100 < 184 < 200$

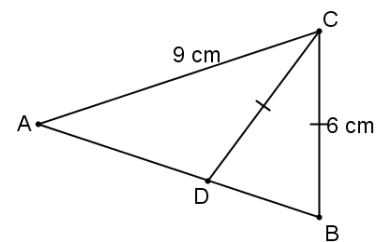
2. Korvaa kirjaimet luvuilla niin,
että eri kirjaimet vastaavat eri lukuja.

Ratkaisu:
eli $S=5, I=2, M=1, K=4, A=0$

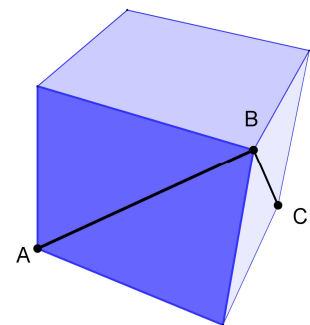
$$\begin{array}{r} \text{S I M A} \\ + \text{S I K A} \\ \hline \text{M A K S A} \end{array} \qquad \begin{array}{r} + 5210 \\ + 5240 \\ \hline 10450 \end{array}$$

3. Kolmiot ABC ja DBC ovat tasakylkisiä.
Kuinka pitkä on sivu BD ?

$BD=4 \text{ cm}$
koska $ABC \sim CBD$ (kantakulmat yhtä suuret)
 $\Rightarrow AC/CB=CB/BD$
 $9\text{cm}/6\text{cm}=6\text{cm}/x \quad x=4 \text{ cm}$



4. Kuinka suuri on kuution piirretty kulma ABC ?
kulma $ABC=60^\circ$
kolmio ABC -tasasivuinen, koska kuution tahkojen
lävistäjät ovat yhtäpitkät



5. Mikä numero on ykkösten paikalla luvun 2^{2010}
kymmenjärjestelmäesityksessä?
Kakkosten positiivisen potenssin viimeinen numero voi olla 2,4,8,6.
Eli neljä vaihtoehtoa tässä järjestyksessä) $2010=4 \cdot 502+2$
Toinen numero jonossa on 4 \Rightarrow vastaus: viimeinen numero on 4.

6. Onko mahdollista, että positiivisen luvun neliö on yhtä suuri kuin kaksi kertaa saman luvun kuutio? Anna esimerkki, jos on mahdollista, tai perustele, miksi ei ole mahdollista.

kyllä, se luku on $1/2$
 $a^2=2a^3$
 $a^2(2a-1)=0$
 $a=0$ tai $2a-1=0$

0 ei kelpaa, koska $a>0$, siis $a=1/2$

7. Mikä on pienin arvo, jonka neljän kokonaisluvun tulo voi saada, kun luvut ovat peräkkäisiä kahden välein?

Ratkaisu: -15.

Arvon on oltava negatiivinen (siksi joko 1 neg. luku, tai kolme neg. lukua)

$$1 \cdot (-1) \cdot (-3) \cdot (-5) = -15$$

$$\text{tai } 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot (-1) = -15$$

hyväksytään myös: $1 \cdot (-2) \cdot (-5) \cdot (-8) = -80$ (ja vastaavat)

8. Suunnikas $ABCD$ on jaettu yhdeksäksi pienemmäksi suunnikkaaksi. Suunnikkaan $ABCD$ piiri on 25 cm ja neljän pienen suunnikkaan piiri on merkitty kuvaan. Kuinka pitkä on keskimmäisen tummennetun suunnikkaan piiri?

vastaus 7 cm

1. tapa: yhtälöillä

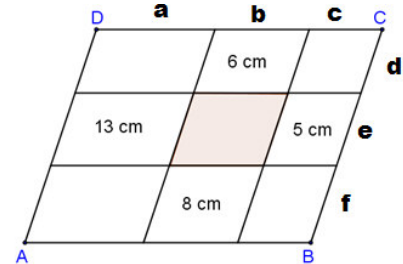
$$2(a+b+c+d+e+f) = 25$$

$$2a+2e=13$$

$$2b+2d=6$$

$$2c+2e=5$$

$$2b+2f=8$$



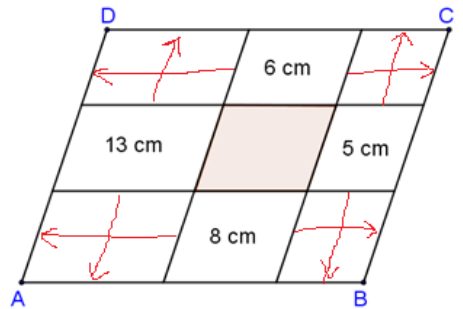
sijoitetaan toisen toiseen muutama kertaa, saadaan $2b+2e=7$ cm

2. tapa: ristin ja suunnikkaan piirit ovat samat.

Jos lasketaan yhteen merkityt pienet suunnikkaat, se yhteispiiri on ristin piiriä suurempi. Niiden ero on tummenettu piiri,

$$\text{siis } 13\text{cm} + 6\text{cm} + 5\text{cm} + 8\text{cm} - 25\text{cm} = 7\text{cm}$$

$13\text{cm} + 6\text{cm} + 5\text{cm} + 8\text{cm} = 32\text{cm} =$ suunnikkaan $ABCD$ piiri + tummennetun suunnikkaan piiri, joten tummennetun suunnikkaan piiri on $32\text{cm} - 25\text{cm} = 7\text{cm}$



9. Vuosiluvuista 2009 ja 2010 saadaan pienillä muutoksilla luvut 200^9 ja 20^{10} . Kumpi luvuista on suurempi ja kuinka moninkertainen pienempään verrattuna?

$$200^9 = 2^9 \cdot 10^{18} > 2^{10} \cdot 10^{10} = 20^{10}$$

$$\frac{200^9}{20^{10}} = \frac{2^9 \cdot 10^{18}}{2^{10} \cdot 10^{10}} = \frac{10^8}{2} = 5 \cdot 10^7$$

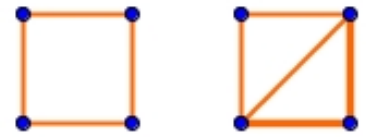
Vastaus : 50 miljoona kertaa suurempi / $5 \cdot 10^7$ -kertainen

10. Onko mahdollista piirtää tasoon yhdeksän janaa niin, että jokainen leikkaa tasan kolme janaa?

Vastaus: ei ole mahdollista, koska jos

jokainen jana leikkaa jokaisen muodostuu $9 \cdot 3 = 27$ leikkausta, mutta leikkauspiste on yksi kahdelle, siksi pitää jakaa 2:lla mutta $9 \cdot 3 / 2 = 13.5$ -ei ole kokonaisluku

1. Geolaudalle muodostettavista neliöistä pienin on se, jossa on $2 \cdot 2$ piikkiä. Sen voi jakaa janaksi viritetyllä kumilenkillä kahteen yhtenevään osaan vain yhdellä tavalla, kun kumilenkki ei mene neliön ulkopuolelle. Kiertämällä tai kääntämällä saadut ratkaisut eivät ole erilaisia.

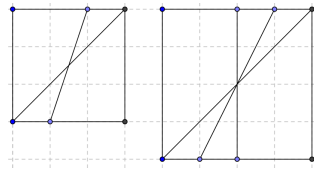


Kuinka monella eri tavalla voit vastaavasti jakaa kahteen yhtenevään osaan neliön, jonka sivut ovat geolaudan sivujen suuntaiset ja jossa on

- a) $4 \cdot 4$ piikkiä
- b) $5 \cdot 5$ piikkiä
- c) $n \cdot n$ piikkiä
- d) $m \cdot n$ piikkiä ($m \neq n$)?

Piirrä ratkaisusi tai selitä perustelusi.

Vastaus: a) 2 eri tavalla b) 3 eri tavalla

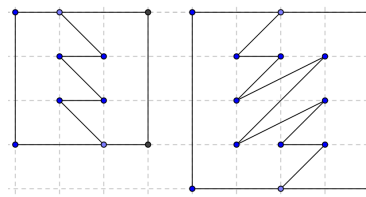


- c) $\frac{n}{2}$ eri tavalla, jos n on parillinen, ja $\frac{n+1}{2}$ eri tavalla, jos n on pariton

- d) $\frac{m+n}{2}$ eri tavalla, jos m ja n ovat parittomia, $\frac{m+n}{2}-1$ eri tavalla, jos m ja n ovat parillisia, ja $\frac{m+n-1}{2}$ eri tavalla, jos $m+n$ on pariton.

2. Muodosta geolaudalle neliö, jonka sivut ovat geolaudan sivujen suuntaiset. Jaa se kahteen yhtenevään osaan murtoviivaksi viritetyllä kumilenkillä, joka ei mene neliön ulkopuolelle. Kuinka monen piikin yli kuminauha viritetään, että osilla on mahdollisimman monta kärkeä, kun neliössä on

- a) $4 \cdot 4$ piikkiä
 - b) $5 \cdot 5$ piikkiä?
- Piirrä ratkaisusi.



Vastaus: a) esim.
b) esim.

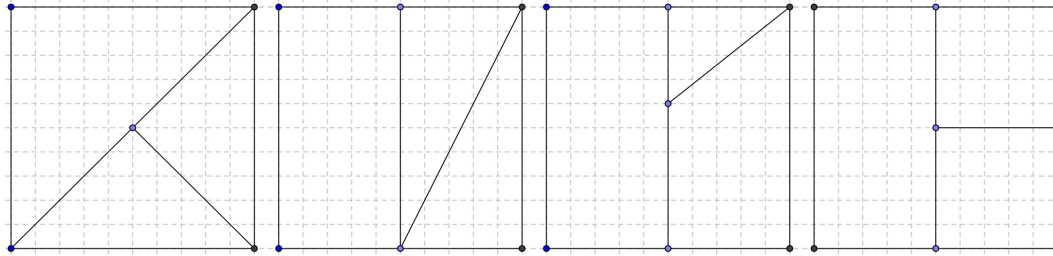
3. Muodosta $11 \cdot 11$ -piikkiselle geolaudalle pinta-alaltaan mahdollisimman suuri kupera monikulmio. Jaa monikulmio janaksi viritetyllä kumilenkillä kahteen osaan niin, ettei kumilenkki mene monikulmion ulkopuolelle. Jaa osista toinen edelleen samoin kahteen osaan.

Kuinka monta kärkeä yhteensä muodostuneilla kolmella monikulmiolla voi olla, kun alkuperäinen kuvio on

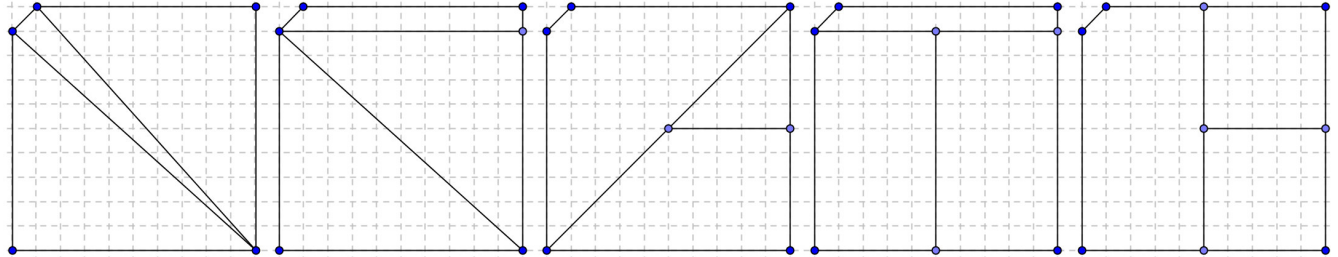
- a) nelikulmio
- b) viisikulmio?

Piirrä ratkaisusi.

Vastaus: a) 9, 10, 11 tai 12, esim.



b) 9, 10, 11, 12 tai 13, esim.

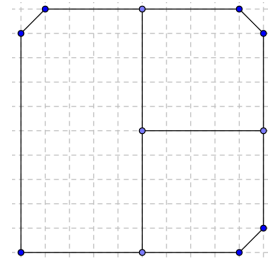


Kuinka monta kärkeä yhteensä muodostuneilla kolmella monikulmiolla voi **enintään** olla, kun alkuperäinen kuvio on

c) seitsenkulmio

d) n -kulmio?

Piirrä ratkaisusi tai selitä perustelusi.



Vastaus: c) 15, esimerkiksi

d) $n+8$, esim. taulukon perusteella

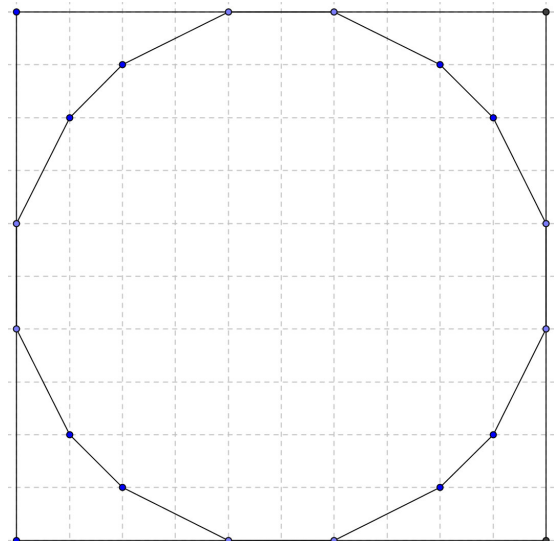
Alkup. kuvion kärjet	Osien kärkiä enintään yhteensä
3	11
4	12
5	13
6	14
7	15

4. Muodosta 11·11-piikkiselle geolaudalle kupera monikulmio, jossa on mahdollisimman monta kärkeä. Piirrä ratkaisusi ja ilmoita monikulmion pinta-ala yksikkönä mahdollisimman pieni geolaudalle piirrettävä neliö. (2 pistettä)

16-kulmio

Pinta-ala $A = 78$

Muukin muoto kelpaa, jos kärkiä on riittävästi.



OSA 3

1. Määritä kaikki positiiviset kokonaisluvut n , joille $z = \frac{198}{4n+3}$ on myös positiivinen kokonaisluku.

Vastaus: $n = 2$ tai $n=24$

$$z = \frac{198}{4n+3}$$

$$198 = 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3$$

$$z \in \mathbb{Z} \text{ jos } (4n+3) \in \{2, 3, 6, 9, 11, 18, 22, 33, 66, 99, 198\}$$

tai 198 on oltava $(4n+3)$ jaollinen

$4n+3 > 7$ ja pariton, siksi luku 3 ja parilliset luvut ei tarvitse tarkistaa eli $(4n+3) \in \{9, 11, 33, 99\}$

jos $4n+3=9$ ja $4n+3=33$, z ei ole kokonaisluku

$$4n+3=11 \Leftrightarrow n=2$$

$$4n+3=99 \Leftrightarrow n=24$$

$$2. \left(1 - \frac{1}{2^2}\right) \left(1 - \frac{1}{3^2}\right) \dots \left(1 - \frac{1}{2010^2}\right) = \frac{x}{2 \cdot 2010}$$

Mikä luku on x ?

$$x = 2011$$

$$\frac{3}{4} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{8}{9} = \frac{2}{3} = \frac{4}{6}, \quad \frac{4}{6} \cdot \frac{15}{16} = \frac{5}{8}, \quad \frac{5}{8} \cdot \frac{24}{25} = \frac{3}{5} = \frac{6}{10}$$

jonosta huomioidaan sääntö: $\frac{n+1}{2 \cdot n}$

3. Säännöllisestä tetraedristä (nelitahokkaasta) leikataan särmien keskipisteiden kautta kulkevilla tasoilla pois neljä pientä tetraedria, yksi kunkin kärjen puolelta.

a) Kuinka monta särmää on jäljelle jääneessä keskiosassa?

b) Kuinka monta tahkoa on jäljelle jääneessä osassa?

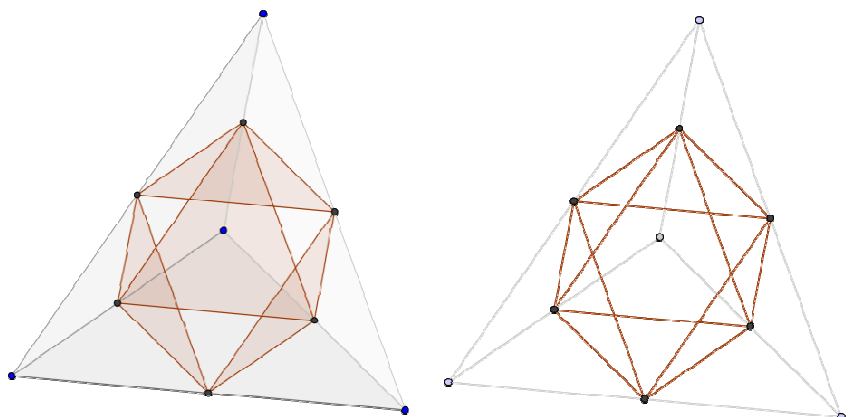
c) Kuinka suuri on sen tilavuus alkuperäiseen tetraedriin verrattuna?

a) 12

b) Kahdeksan

c) tilavuus puolet.

$$\text{Tilavuus} = 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{2}$$



4. *Pelasta maailma* -tietokonepelissä maailmaa kuvaillaan kolmiulotteisessa koordinaatistossa, jonka origona on planeetan pinnalla oleva havaitsija. Koordinaatiston x-akseli osoittaa pohjoiseen, y-akseli länteen ja z-akseli kohtisuoraan ylös. Alkutilanteessa vieras avaruuslaiva pudottaa myrkkyräjähteen kohdassa, jonka koordinaatit ovat $x = 15\,000\text{ m}$, $y = 20\,000\text{ m}$, $z = 10\,000\text{ m}$. Räjähde paikan koordinaatit ajan funktiona ovat

$$x = 15\,000 - 200t$$

$$y = 20\,000 + 200t$$

$$z = 10\,000 - 100t,$$

missä t on aika sekunteina ja koordinaatit ovat metreinä.

a) Paljonko aikaa pelaajalla on ennen kuin räjähdde osuu planeetan pintaan?

b) Mihin ilmansuuntaan räjähdde liikkuu?

c) Kuinka kaukana havaitsijasta räjähdde osuu planeetan pintaan?

a) planeetan pinnassa $z=0$

$$10\,000 - 100t = 0$$

$$t = 100 \quad s = 1 \text{ min } 40 \text{ s}$$

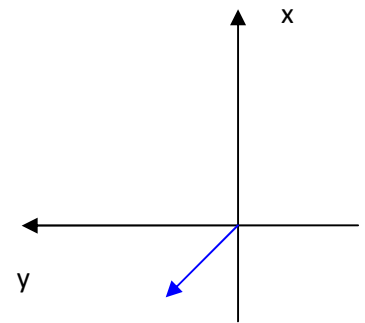
b) lounas:

$$x = 15000 - 200t, \quad y = 20000 + 200t, \quad z = 10000 - 100t$$

alleviivattuja lukuja – nopeudet x, y ja z pitkin.

Z -ei kiinnosta, vain $(x, y) = (-200, 200)$. Ks.kuvaa,

jossa x suunnattu pohjoiseen kartoista tutulla tavalla



c) räjähdde osuu planeetan pintaan kun $t = 100\text{ s}$

$$\text{siis } x = 15\,000 - 200 \cdot 100 = -5\,000 \text{ (m)} = 5 \text{ km}$$

$$y = 20\,000 + 200 \cdot 100 = 40\,000 \text{ (m)} = 40 \text{ km}$$

$$\text{Pythagoraan lause: } d = \sqrt{(-5)^2 + 40^2} = 40.311 \text{ km} \approx 40 \text{ km}$$

5. Swahilia käytetään yleiskielenä Itä-Afrikassa, jossa sitä puhuu toisena kielenään noin 50 miljoonaa ihmistä. Äidinkieliä swahilin puhujia on noin viisi miljoonaa.

Swahilin kielen sanojen **mtu**, **mbuzi**, **mgeni**, **jito**, **jitu** ja **kibuzi** vastineet ovat **jättiläinen**, **kili** (pieni vuohi), **vieras**, **vuohi**, **ihminen** ja **iso joki**, vaikka eivät samassa järjestyksessä. Päättele, mikä on kunkin swahilin kielen sanan oikea vastine.

Kaikki sanat voidaan helposti jakaa kahdeksi osaksi. Oletetaan, että niillä on joku tarkoitus. Taulukossa näkyy mitkä yhdistelmät löytyvät tehtävän sanoissa:

	-buzi	-geni	-to	-tu
ji-			+	+
ki-	+			
m-	+	+		+

Seuraavaksi päätellään mitä tarkoittaa jokainen osa. Käännökset auttavat: niistä voidaan ottaa tarkoitukset *vieras, vuohi, joki, ihminen (neutraalit)*, ja niiden sukusanat, joilla on pienennys- ja suurennus- tarkoitukset. Tehdään niistä taulukko.

	'vieras'	'vuohi'	'joki'	'ihminen'
pieni		+		
neutraali	+	+		+
suuri			+	+

Nyt pitää vain vaihtaa taulukossa rivit ja sarakkeet niin, jotta voisimme laittaa taulukot päällekkäin.

m-=neutraali, ***ji-***= suurentava, ***ki-***=pienentava
-buzi= vuohi, ***-geni***= vieras, ***-to***= joki, ***-tu***= ihminen

Ja vastaus:

mtu — ihminen, *mbuzi* — vuohi, *mgeni* — vieras, *jito* — iso joki, *jitu* — jättiläinen, *kibuzi* — vuohinen.