

PERUSKOULUN MATEMATIIKKAKILPAILU
LOPPUKILPAILU PERJANTAINA 4.2.2005

OSA 1 Laskuaika 30 min Pistemäärä 20 pistettä

1. Mikä on lukujonon seuraava jäsen? Minkä säännön mukaan lukujono muodostuu?

$$\frac{1}{5}, \frac{4}{7}, 1, 1\frac{5}{11}, 1\frac{12}{13}, \dots$$

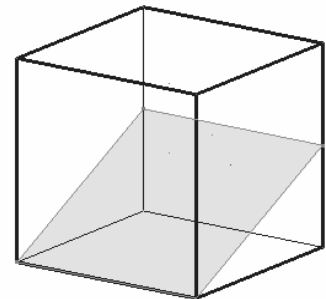
2. Täydennä lauseke peruslaskutoimitusmerkeillä siten, että yhtälö on tosi.

$$1 \square 2 \square 3 \square 4 \square 5 \square 6 \square 7 \square 8 = 9$$

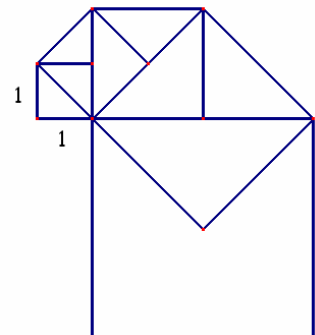
3. Märän sienen massa on 1 kg ja se sisältää 99 % vettä. Siitä puristetaan vettä pois niin paljon, että veden osuus on enää 98 %. Paljonko sienen massa on nyt?

4. Oletetaan, että $n = 3^x + 3^x + 3^x$. Sievennä n^2 niin pitkälle kuin mahdollista.

5. Kuutio leikataan kahteen osaan tasolla, joka kulkee kahden kärjen ja kahden särmän keskipisteiden kautta kuvan mukaisesti. Missä suhteessa leikkaava taso jakaa kuution a) tilavuuden ja b) pinta-alan?



6. Neliöt muodostetaan kuvan osoittamalla tavalla lähtien neliöstä, jonka sivu on 1 (pituusyksikkö). Kuinka pitkä on yhdennentoista neliön sivu?



KÄÄNNÄ!

7. Tasakylkisen kolmion piiri on $100x$ ja kunkin sivun mittaluku x :n kokonaislukukerrannainen. Mikä on suurin ja mikä pienin mahdollinen kyljen pituus?
8. Osoita, että viiden peräkkäisen kokonaisluvun neliöiden summa on jaollinen viidellä.
9. Toisen asteen yhtälön $x^2 + bx + c = 0$ ratkaisujen (juurten) summa on $-b$ ja ratkaisujen tulo on c . Ratkaise tällä perusteella yhtälö $x^2 + 21x - 196 = 0$.
10. Määritä tulo abc , kun

$$\begin{cases} ab + b = -1 \\ bc + c = -1 \\ ac + a = -1 \end{cases}$$

Peruskoulun matematiikkakilpailu
loppukilpailu PERJANTAINA 4.2.2005

OSA 2 Laskuaika 45 min Pistemäärä 20 pistettä

Tehtävien ratkaisut on etsittävä taittelemalla (käyttämättä hyväksi muuta kuin taitettavaa paperia). Tee jokainen taittelutehtävä eri paperille. Terävät taitokset!
Merkitse jokaiseen paperiin nimesi ja tehtävän numero (esimerkiksi 1a, 2c jne.).
Numeroi taitokset taittamisjärjestyksessä, samanaikaisesti syntyvät taitokset samalla numerolla.
Rengasta tehtävän ratkaisuna olevan taitoksen numero (tai numerot).
Voit kirjoittaa paperille selityksiä tai perusteluja.
Huom! Tehtävien ratkaisuiden on oltava taitoksia, ei paperin reuna tai kulma.

1. a) Piirrä paperille suora l ja suoran ulkopuolelle piste P.
Taita paperi siten, että taitos t kulkee annetun pisteen kautta ja on kohtisuorassa annettua suoraa vastaan. (1 piste)
- b) Piirrä suora l ja suoran ulkopuolelle piste P. Taita paperi siten, että taitos t on yhdensuuntainen annetun suoran l kanssa ja kulkee pisteen P kautta. (1 piste)
- c) Piirrä kulma. Jaa se kolmeen yhtä suureen osaan taittelemalla (1 piste)
2. Taittele
- a) kulma, jonka suuruus on 60 astetta (1 piste)
- b) tasakylkinen, suorakulmainen kolmio (1 piste)
- c) säännöllinen kahdeksankulmio. (2 pistettä)
3. a) Piirrä suuri kolmio.
Etsi paperia taittelemalla kolmion sivujen keskinormaalien leikkauspiste. (2 pist.)
- b) Piirrä suuri teräväkulmainen kolmio.
Osoita taittelemalla, että kolmion kulmien summa on 180 astetta. (3 pist.)
4. Olkoon A4-arkin lyhimmän sivun pituus 1 (pituusyksikkö).
- a) Osoita taittelemalla, että pitemmän sivun pituus on $\sqrt{2}$ (pituusyksikköä). (2 pist)
- b) Taita arkki siten, että taitteen pituus on $\sqrt{3}$ (pituusyksikköä). (2 pist)

KÄÄNNÄ!

5. Paperiliuska taitetaan keskeltä, kaksinkerroin oleva liuska taitetaan kahtia jne. Kun taitettu liuska avataan, niin taitteet edustavat murtolukuja

$$\frac{m}{2^n},$$

missä n on taitoksien lukumäärä ja m on luonnollinen luku $0 < m < 2^n$.

Esimerkiksi

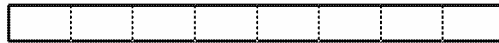
$$\frac{1}{2}$$



$$\frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}$$



$$\frac{1}{8}, \frac{2}{8}, \frac{3}{8}, \frac{4}{8}, \frac{5}{8}, \frac{6}{8}, \frac{7}{8}$$



Merkitään N :llä suurinta mahdollista n :n arvoa, jolla taitteet ovat riittävän teräviä, että ne voidaan vielä selvästi nähdä, kun taitettu liuska avataan.

- a) Mikä on N :n arvo, kun taitettavana on tavallisen monistuspaperin paksuisesta A4-arkista pitemmän sivun suuntaan leikattu liuska? (Vastaukseksi luku ja liuska 4a.) (1 piste)
- b) Mitä muita nimittäjiä kuin muotoa 2^n olevia on mahdollista saada taittelemalla todellista liuskaa? (Taita tai piirrä.) (2 pist.)
- c) Millaisten murtolukujen nimittäjiä ei voida saada näkyviin taittelemalla? (1 piste)

PERUSKOULUN MATEMATIIKKAKILPAILU
LOPPUKILPAILU PERJANTAINA 4.2.2005

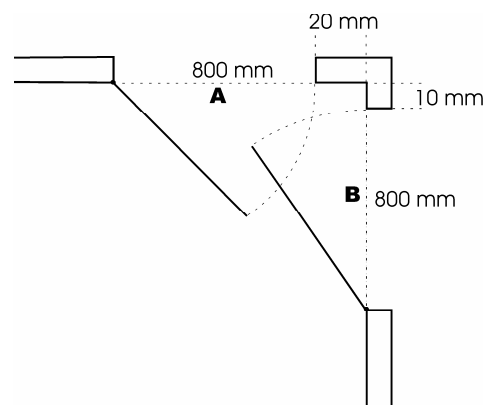
OSA 3 Laskuaika 60 min Pistemäärä 30

1. Maalattu puukuutio sahataan pieniksi kuutioiksi tasavälein kaikkien sivutahkojen suuntaan. Joka suuntaan on n sahausta. Merkitse lausekkeena,
- kuinka monta sahausta tehdään kaikkiaan?
 - kuinka monta pientä kuutiota syntyy yhteensä?
 - kuinka monessa pienessä kuutiossa on kolme maalattua tahkoa?
 - kuinka monessa pienessä kuutiossa on kaksi maalattua tahkoa?
 - kuinka monessa pienessä kuutiossa on yksi maalattu tahko?
 - kuinka monessa pienessä kuutiossa ei ole yhtään maalattua tahkoa?

2. a) Sinulla on käytössäsi kaksi noppaparia, muodoltaan tavanomaisia pyöristetyn kuution muotoisia. Ensimmäisen parin kummankin nopan silmäluvut ovat 1, 2, 3, 4, 5 ja 6. Toisen parin ensimmäisen nopan silmäluvut ovat 1, 2, 2, 3, 3 ja 4 ja toisen 1, 3, 4, 5, 6 ja 8. Kummalla noppaparilla on todennäköisempää saada noppien silmälukujen summaksi kaksitoista?
- b) Oletetaan, että sinulla ja ystävälläsi on valittavana neljä noppaa. Noppien silmäluvut ovat
- nopassa 1: 0, 0, 4, 4, 4, 4,
 - nopassa 2: 3, 3, 3, 3, 3, 3,
 - nopassa 3: 2, 2, 2, 2, 6, 6 ja
 - nopassa 4: 1, 1, 1, 5, 5, 5.

Pelaatte peliä, jossa kumpikin heittää kerran omaa noppaansa ja suuremman silmäluvun saanut voittaa. Ystäväsi valitsee nopan kolme. Mikä noppa sinun kannattaa valita, että voittomahdollisuutesi olisivat mahdollisimman suuret?

3. Huoneen nurkassa on kaksi sisäänpäin aukeavaa ovea. Kuinka paljon oviaukkoa B pitää siirtää, jotta ovet eivät voi osua toisiinsa? (Likiarvo millimetrin tarkkuudella, tarkkaa arvoa ei vaadita.)



KÄÄNNÄ!

4. Neliön sisällä on säännöllinen kahdeksankulmio niin, että neljä sen sivuista on neliön sivuilla. Kuinka monta prosenttia kahdeksankulmion piiri on neliön piiristä? (Tarkka arvo ja likiarvo kymmenesosaprocentin tarkkuudella.)

5. Tasakylkisen puolisuunnikkaan muotoisessa kulta-
korussa on sivujen lisäksi lävistäjät AC ja BD sekä
yhdensuuntaisten kantasivujen AB ja CD suuntainen
tanko EH. Kantasivujen pituudet ovat $AB = 84$ mm ja
 $CD = 56$ mm. Kuinka pitkä on tanko EH, jos se
sijoitetaan siten, että $EF = FG = GH$?

