

# Tasokäyrän kaarevuus

HANNU KORHONEN, lehtori emeritus, Orimattila

Radan muodon voit tuntea keskeisvoimista vuoristoradalla tai tien jyrkissä mutkissa. Keskeiskiitävyyden riippuvuus radan kaarevuudesta sisältyy lukion fysiikan kurssiin. Koulumatematiikassa käyrän kaarevuutta ei tutkita lainkaan, sillä se on laskennallisesti melko työlästä. Käsite esiintyi kuitenkin pitkän matematiikan ylioppilaskokeessa keväällä 2011. Saattaa siksi olla hyödyllistä tutustua matematiikkaohjelmistojen, esimerkiksi Geogebbran, tarjoamiin havainnollistamiskeinoihin.

Käyrän  $y = f(x)$  kaarevuutta pisteessä  $(x, f(x))$  kuvaava luku  $\kappa$  (kappa) saadaan [1] lausekkeesta

$$\kappa(x) = \frac{f''(x)}{(1 + f'(x)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

tai parametrimuodossa annetun käyrän  $f(t) = (x(t), y(t))$  tapauksessa lausekkeesta

$$\kappa(x, y) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{\frac{3}{2}}}$$

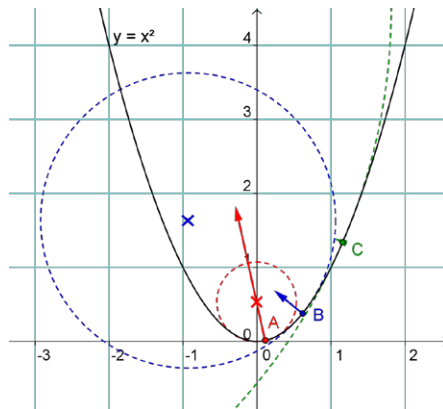
Ei siis mitään herkkua käsin laskettavaksi. Dynaamisella matematiikkaohjelmalla, jossa on valmiina painike, komento tai funktio kaarevuudella, tutkiminen käy kuitenkin leikiten.

Sen lisäksi, että **kaarevuus** on työläs laskea, lauseke ei kerro mitään kaarevuuden geometrisesta merkityksestä. Kaarevuuden itseisarvo on suuri, kun käyrä kaartuu jyrkästi. Sitä voidaan havainnollistaa joko kaarevuusvektorilla tai kaarevuussäteellä (**Kuva 1**).

**Kaarevuusvektori** on kohtisuorassa käyrää vastaan. Sen suunta on sisäkaarteeseen päin ja pituus on kaarevuuden itseisarvo. Näin se vastaa keskeisvoimamielikuvaa siinä mielessä, että se on pitkä jyrkässä kaarteessa.

**Kaarevuussäde** taas on käyrää tietyissä pisteissä sivuavan sellaisen ympyrän säde, joka kaartuu samalla tavalla kuin käyrä. Kaarevuusympyrä kuvaa siis käyrän geometrista muotoa sivuamispuolelta lähiympäristössä. Useamman kaarevuusympyrän avulla käyrän kulusta saa melko hyvän kuvan [2]. Säde on sitä suurempi, mitä loivempi kaarre on. Tarkasti ottaen kaarevuussäteen pituus on kaarevuuden itseisarvon käänteisluku:

$$r_{\perp} = \frac{1}{|\kappa|}$$



**Kuva 1.** Kuvaajan kolmeen pisteeseen piirretyt kaarevuusvektorit ja  $-$ ympyrät.

Paraabelin tapauksessa kaarevuussäde kasvaa nopeasti, kun siirrytään kauemmaksi paraabelin huipusta. Kaarevuusympyröiden keskipisteet muodostavat käyrän, jossa on yksi kärki (**Kuva 2**). Se on paraabelin huippua sivuavan kaarevuusympyrän keskipiste. Käyrästä käytetään nimitystä *evoluutta*. Sillä ei ole suomalaisperäistä nimeä.

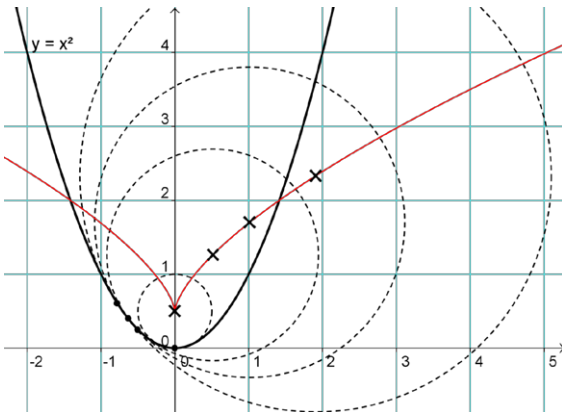
Mistä tahansa evoluutan pisteestä eli siis erään kaarevuusympyrän keskipisteestä vastaavaan sivuamispuolelta piirretty jana on kaarevuusympyrän säde ja siis luonnollisesti kohtisuorassa ympyrää ja samalla siis käyrää vastaan (**Kuva 4**). Tätä janaa pitkin kulkeva suora on evoluutan tangentti. Tämä ominaisuus tarkoittaa sitä, että evoluuttia voidaan pitää yhtä hyvin käyrän normaalien verhoikäyränä kuin sen kaarevuusympyröiden keskipisteiden urana (**Kuva 3**).

Käyrä ja sen evoluutta muodostavat toisiinsa niin kiinteästi liittyvän parin, että myös käyrällä on oma nimi evoluutan suhteen. Sanotaan, että käyrä on evoluuttansa *involuutta*. Tälläkin sanalla ei ole suomalaisperäistä vastinetta. Nimitykset johtuvat latinan

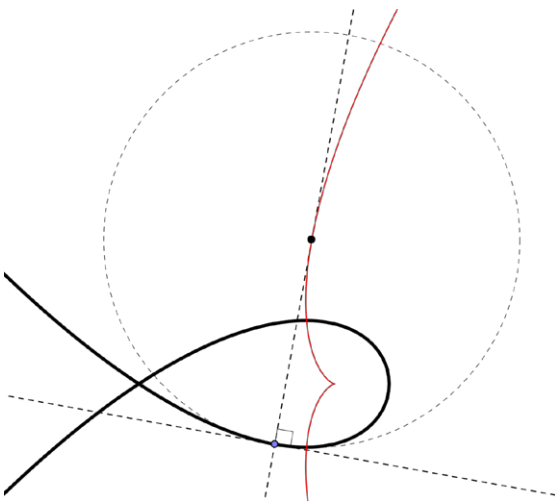
verbeistä *ēvolvere* ja *involvere* (vierittää, kääriä auki, avata ja vierittää, kääriä kokoon, peittää). Näiden merkitysten takana on geometrinen mielikuva.

Ajatellaan, että evoluuttaa pitkin kulkee lanka (Kuva 5), jonka irtopää ulottuu käyrälle saakka alhaalla. Toinen pää on kiinni jossakin riittävän kaukana ylhäällä olevassa käyrän pisteessä. Kun käyrällä olevaa langan päätä siirretään käyrää pitkin kuvassa vasemmalle, niin yhä pitempi osa langasta kiertyy auki, toisin sanoen irti evoluutasta.

Jos taas ajatellaan, että langan pää kiertää silmukkaa vastapäivään, niin lanka kiertyy evoluutalle, kunnes tullaan silmukan symmetria-akselille. Tällöin langan kiinnityskohta hyppää evoluutan alemmalle haaralle ja jos jatketaan, niin lanka alkaa kiertyä auki alemmalta haaralta. Evoluutalta katsoen langan pää



**Kuva 2.** Paraabelin kaarevuusympyröiden keskipisteiden muodostamalla käyrällä on yksi kärki.



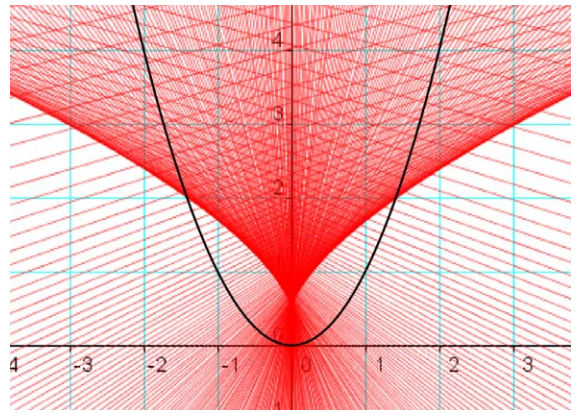
**Kuva 4.** Evoluutan tangentti on kohtisuorassa käyrää vastaan. Käyrä on Tschirnhausenin kuutiokäyrä.

siis tavallaan piirtää käyrän, involuutan tai *evolventin*, jota nimitystä myös käytetään.

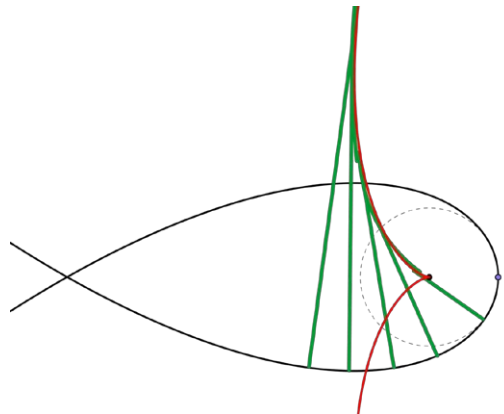
Tällaiset havainnollistukset ja tarkastelutavat saavat ajattelemaan käyrää vanhanaikaisesti konkreettisenä viivana, urana, eikä kuvauksena niin kuin nykyisin matematiikkaa kansantajuistettaessakin saatetaan tehdä esimerkiksi Solmu-lehdessä [3]. Matemaattista kaarevuusmittaa ei useinkaan käytetä arkielämässä, vaan kaarevuus ilmoitetaan esimerkiksi suhdelukuna kuten kurkkujen kaarevuutta koskevassa, aikanaan voimassa olleessa EU-direktiivissä [4]:

”10 mm 10 cm:n matkalla”.

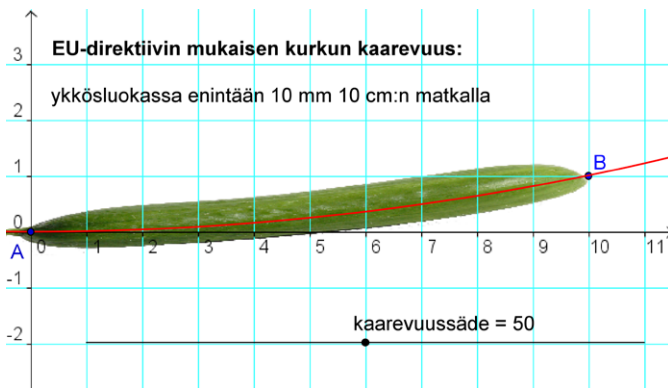
Dynaaminen kuva antaa kaarevuussäteeksi noin 50 (Kuva 6) ja kaarevuudeksi siten 1/50 eli kaksi pro-



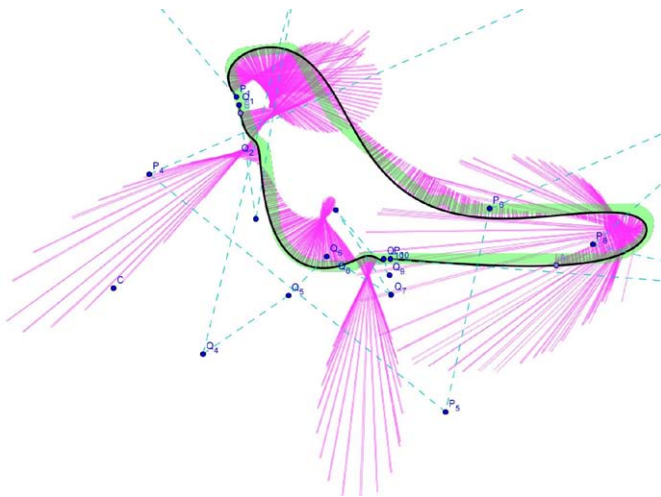
**Kuva 3.** Paraabelin evoluutta on myös paraabelin normaalien verhokäyrä.



**Kuva 5.** Tschirnhausenin kuutiokäyrän silmukka (musta) ja osa evoluutta (punainen). Tätä pitkin kulkee lanka (vihreä), jonka irtopää ulottuu käyrälle. Kun langan päätä siirretään vasemmalle, niin lanka kiertyy auki evoluutalta.



**Kuva 6.** Ykkösluokan kurkku sai myöhemmin kumotun EU-direktiivin mukaan kaareutua enintään kymmenen prosenttia kurkun pituudesta. Kaarevuussäde saadaan piirtämällä kurkun kaarevuusympyrä.



**Kuva 7.** Monzan radan kaarevuutta on mallinnettu kaarevuusvektoreihin verrannollisilla janoilla. Pienetkin mutkat aiheuttavat jyrkkiä kaarevuuspiikkejä. Radan todellinen muoto on piirretty vihreällä.

senttia. Kaarevuus voidaan ratkaista laskemallakin, mutta se ei käykään yhtä helposti kuin kuvan piirtäminen.

Kurkkua monimutkaisempien käyrien tutkimiseen tarvitaan tehokkaampia välineitä kuin yksittäisen kaarevuusympyrä. Eräs mahdollinen kuvailutapa on kaarevuussäteiden piirtäminen näkyviin pitkien käyrää, minkä tekee esimerkiksi Shin Yoshizawan käyräsimulaattori [5]. Appletin säätöpisteiden määrä ei riitä Monzan formularadan mallintamiseen. Siksi mallinnus (**Kuva 7**) on tehty Geogebren Bèzier-käyrillä.

Kaarevuusvektori kuvaa keskeiskiihtyvyyttä vakionopeudella ajattaessa. Todellisuudessa keskeisvoimat ovat mallin antamia suurempia loivissakin kaarteissa, koska niissä nopeudet ovat suurempia kuin jyrkissä kaarteissa. Suurimmat keskeiskiihtyvyyden arvot ovat todellisuudessa radan ylimmässä ja oikeanpuoleisimmassa kaarteissa lähes neljä kertaa putouskiihtyvyyden suuruiset eli  $40 \text{ m/s}^2$ . Kaarevuustarkastelu jättää kokonaan pois radan suunnitellut kiihtyvyydet, jotka ovat myös hyvin suuria jarrutuksessa suoralta mutkaan tultaessa. ■

## Lisää luettavaa:

- [1] Lehtonen, A.: Differentiaaligeometrian kurssin luentomoniste. Jyväskylän yliopisto, 2010. [http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/kl2010/DG\\_kaarevuus2d.pdf](http://users.jyu.fi/~lehtonen/opetus/kl2010/DG_kaarevuus2d.pdf), viitattu 30.10.2011.
- [2] Kivelä, S.: Ellipsin kaarevuusympyrät. <http://matta.hut.fi/matta2/cabri/ellipsi4.pdf>, viitattu 1.11.2011.
- [3] Tuomela, J.: Suorat, käyrät ja kaarevuus. Solmu 3/2003, s. 14–20 osoitteessa <http://solmu.math.helsinki.fi/2003/3/jukka/tuomela.pdf>, viitattu 31.10.2011.
- [4] Kurkkuja koskeva EY-asetus 1677/88 (kumottu 2008) [www.kasvikset.fi/Link.aspx?id=1157430](http://www.kasvikset.fi/Link.aspx?id=1157430), viitattu 31.10.2011.
- [5] Shin Yoshizawan käyräsimulaattori <https://php.radford.edu/~ejmt/Resources/CurveSimulator/CurveSimulator.html>.

## Matematiikan ja luonnontieteiden opetusta vertailtu

**Euroopan komissio** on julkaissut kaksi mielenkiintoista raporttia: Mathematics Education in Europe: Common Challenges and National Policies sekä vastaava raportti luonnontieteistä.

Niissä on selvitetty matemaattisten aineiden opettamisen tapoja ja resursseja. Kannattaa tutustua, sillä kyse on nyky-yhteiskunnan avaintaidoista:

[http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/thematic\\_studies\\_en.php](http://eacea.ec.europa.eu/education/eurydice/thematic_studies_en.php)