

Väriä matematiikan ja ongelmanratkaisutaidon opetukseen

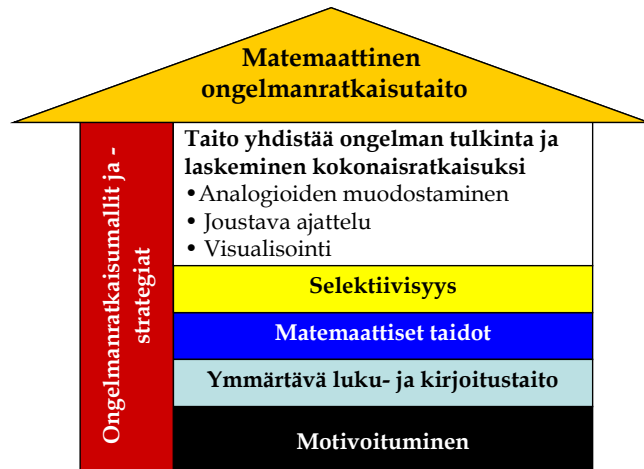
HENRY LEPPÄÄHO, KT, Jyväskylän yliopisto / Opettajankoulutuslaitos, henry.leppaaho@edu.jyu.fi

Oppikirja, lyijykynä, pyyhekumi ja ruutuvihko ovat riittäneet meille useimmille tämän lehden lukijoille motivoinniksi matematiikan opiskeluun. Matemaattisten ongelmien ratkeaminen ja uteliaisuus uusia ongelmia kohtaan ovat ruokkineet kiinnostusta edelleen matemaattis-luonnontieteellisten aineiden opiskeluun ja työskentelyyn niiden parissa. Kaikille edellä mainitut tehokeinot eivät riitä ja niinpä useat potentiaaliset opiskelijat ”valuvat” muille aloille. Kuinka säilytämme oppilaiden mielenkiinnon matemaattisten aineiden parissa? Tähän tarvitaan tänä päivänä muitakin menetelmiä kuin vain taulu ja liitu – pedagogiikkaa.

Toteutetussa väitöskirjatutkimuksessa kuudennen luokan oppilaiden matemaattista ongelmanratkaisutaitoa pyrittiin kehittämään monipuolisesti integroimalla sitä eri oppiaineisiin. Näkökulma on johdonmukainen myös tutkimuksen teoriataustassa muodostetun matemaattisen ongelmanratkaisutaidon määrittelyn kanssa. Sen mukaan matemaattinen ongelmanratkaisutaito jaetaan kuuteen osa-alueeseen, joiden harjoittaminen tukee saatuja tulosten valossa matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittymistä.

1. Johdanto

Ongelmanratkaisu liittyy kiinteästi matematiikkaan. Unkarilainen George Polya (1948) onkin todennut, että ongelmanratkaisu on matematiikan ydin. Samaan käsitykseen on päätyneet myös Alan Schoenfeld (1985; 1992).



Kuva 1 Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon jaottelu tässä tutkimuksessa.

Ongelmanratkaisun keskeistä asemaa on korostettu useita kertoja matematiikan valtakunnallisissa opetussuunnitelmissa ja se huomioidaan myös päättöarvioinnissa. Esimerkiksi arvosanalalle 8 esitetään vaatimuksena 6.–9. luokan kriteereissä, että oppilas osaa muuntaa yksinkertaisen tekstimuodossa olevan ongelman matemaattiseen esitysmuotoon ja kykenee tekemään suunnitelman ongelman ratkaisemiseksi sekä toteuttamaan sen.

Luokkatilanteessa opettaja ratkaisee, kuinka keskeisesti ongelmanratkaisutaitoa opetetaan oppilaille. Oppikirjasarjat eivät juuri korosta itse ongelmanratkaisun oppettamista, sillä ongelmatehtävät sijoitetaan yleensä oppikirjaan jaksos loppuun tai opettajan oppaaseen monisteiksi. Jää siis opettajan päätettäväksi käsitelläkö ongelmatehtäviä vai ei.

Huoli ongelma-keskeisen matematiikan opetuksen kehittämi-

sestä on askarruttanut myös alan tutkijoita. Zimmermann (2000, 62) pohtii miten opettajia voitaisiin auttaa, rohkaista ja motivoida opettamaan matemaattista ongelmanratkaisua. Cain (2000, 32) mukaan opettajat ovat keskeisessä asemassa tehtäessä muutoksia käytännön opetukseen. Hänen mukaansa opettajat tarvitsevat konkreettisia esimerkkejä ja ideoita, jotta he voisivat opettaa ongelma-keskeistä matematiikkaa.

Tutkimuskirjallisuuden mukaan (esim. Lester & Kehle 2003; Schoenfeld 1992) pelkästään ongelmanratkaisustrategioiden opettaminen auttaa vain vähän itse ongelmanratkaisukykyä. Strategioiden opettaminen on kuitenkin hyödyllistä, koska oppilaat tarvitsevat keinoja ja malleja ongelmatehtävien ratkaisemiseen. Tällä tavoin voidaan myös vähentää oppilaiden epävarmuutta ja parantaa heidän asennettaan matemaattista ongelmanratkaisua kohtaan.

Tässä tutkimuksessa toteutettiin opetuskokeilussa oppilaiden ongelmanratkaisutaitoa pyrittiin kehittämään monipuolisesti. Ajatusten lähtökohdaksi oli työn teoriasta muodostettu määrittely matemaattisesta ongelmanratkaisutaidosta (Kuva 1), jonka mukaan se jakautuu seuraaviin osa-alueisiin: 1) ongelmanratkaisustrategiat ja heuristiikat, 2) taito yhdistää ongelman tulkinta kokonaisratkaisuksi, 3) matemaattiset taidot, 4) luku- ja kirjoitustaito, 5) selektiivisyys, sekä 6) motivaatio ja muut affektiiviset tekijät. Saatujen tulosten valossa näiden kaikkien osa-alueiden harjoittaminen tukee matemaattisen ongelmanratkaisutaidon kehittymistä.

2. Tutkimuksen koeasetelma ja tutkimusmenetelmä

Tutkimuksen koeasetelmana käytettiin kvasikokeellista mallia. Alku- ja loppumittausta sekä viivästettyä mittausta varten laadittiin kolme matemaattista ongelmanratkaisutaitoa mittaavaa koetta. Koeryhmä (n = 17) muodostui yhdestä kuudennesta luokasta ja kontrolliryhmänä (n = 35) toimivat saman koulun kaksi rinnakkaista kuudetta luokkaa. Molemmat ryhmät suorittivat alku- ja loppukokeen. Kokeiden välissä koeryhmä osallistui matemaattiselle ongelmanratkaisukurssille. Sen aikana kontrolliryhmän oppilaat opiskelivat oppikirjojensa mukaisesti opettajiensa johdolla. Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin aiheet noudattivat koe- ja kontrolliluokalla käytössä olleen matematiikan oppikirjan sisältöjä. Loppukokeen jälkeen koeryhmän oppilaat haastateltiin. Viivästetyn kokeen tehtävät laadittiin alku- ja loppukokeiden pohjalta. Se suoritettiin molemmille ryhmille 1,5 vuotta loppukokeen jälkeen. Tällöin koko otoksen oppilaat olivat

siirtyneet samaan yläkouluun seitsemännän luokan oppilaisiksi, kahdeksaan eri luokkaan.

Ohjaavana tutkimusmenetelmänä käytettiin sovellettua muotoa opettamisen kehittämistutkimusmenetelmästä, jota englanninkielisessä kirjallisuudessa kutsutaan *design research*-menetelmäksi. Se tarjosi tähän tutkimukseen soveltuvan tavan kokeilla ja arvioida opetukseen liittyvää teoriaa käytännössä ja pyrki kehittämään sitä edelleen.

3. Oppimisympäristö

Matemaattiseen ongelmanratkaisuun ja sen opettamiseen pohjautuvan viitekehyksen pohjalta suunniteltiin oppimisympäristö (Kuva 2), joka toteutettiin koulussa koeryhmälle 1,5 kuukauden aikana 30 opituntia sisältävänä ongelmanratkaisukurssina. Laaditun oppimateriaalin, opetuksen integroinnin ja oppilaille opetetun ratkaisukarttamenetelmän yhteisenä päämääränä oli koeryhmän oppilaiden ongelmanratkaisutaidon kehittäminen.

Opetus ja oppimateriaali

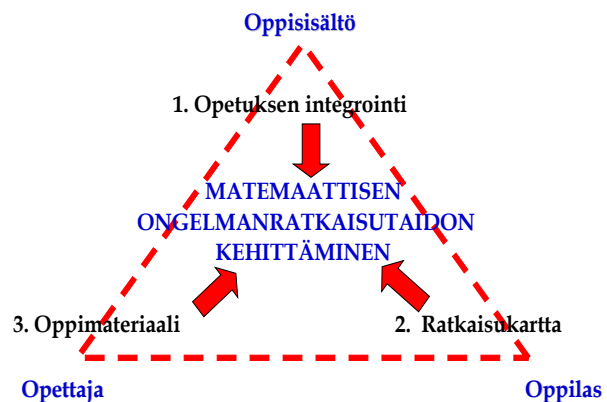
Opetus suunniteltiin ja toteutettiin Schroederin ja Lesterin (1989, 31–42) kolmen lähestymistavan avulla, joihin myös Nunokawa (2005, 328–335) pohjaa käsityksensä ma-

temaattisen ongelmanratkaisun opettamisesta ja oppimisesta. Näämä lähestymistavat ovat seuraavat: 1) *Opetetaan jotakin ongelmanratkaisusta*. Tällöin oppilaille opetetaan ongelmanratkaisustrategioita, joita he voivat soveltaa ongelmanratkaisu-tehtäviin. 2) *Opetetaan ongelmanratkaisua varten*, jolloin painottuvat matemaattisen tiedon merkitys ja esimerkiksi peruslaskutoimitusten opettaminen. 3) *Opetetaan ongelmanratkaisun kautta*, jolloin ongelmanratkaisu ymmärretään opetusmenetelmänä. Tällöin ongelmia ei ratkaista ainoastaan matematiikan oppimista varten, vaan ne toimivat myös oppimisen työkaluina.

Oppimateriaali, jonka avulla tutkimukseen suunniteltu opetus toteutettiin, kehitettiin yhteistyössä kustantajan kanssa painetuksi opettajan oppaaksi (Leppäaho, H. 2004. *Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle*. Helsinki: WS-OY). Se sisälsi tuntisuunnitelmat ja tehtävät, joiden avulla matematiikan ja ongelmanratkaisunopetus integroitiin äidinkielen ja kirjallisuuteen, käsityöhön, kuvataiteeseen sekä ympäristö- ja luonnon-tieteeseen.

Ratkaisukartta

Opetuksessa keskeisenä tavoitteena oli opettaa tutkimusta varten



Kuva 2 Matemaattisen ongelmanratkaisukurssin avulla luotu oppimisympäristö.

kehitetty ongelmanratkaisustrategia – ratkaisukarttamenetelmä – työkaluksi oppilaille tehtävien ratkaisuun. Ratkaisukarttamenetelmän ajatuksena on, että oppilas oppisi kokoamaan ja kirjoittamaan tehtävästä muistiinpanot, joiden avulla ongelmatehtävä on mahdollista ratkaista.

Ratkaisukartta sisältää tehtävässä annetut tiedot, mahdollisen apupiirroksen, ratkaisuyritykset, myös virheelliset, ja toivottavasti myös oikean ratkaisun. Kuvassa 3 on esimerkki koeryhmän oppilaan laatimasta ratkaisukartasta. Opettajalle oppilaan laatima ratkaisukartta paljastaa oppilaan ratkaisuprosessin. Ratkaisukartassa oppilaan ajattelun tuotokset eli representaatiot ovat nähtävissä paperilla, ja niiden avulla voidaan selvittää oppilaan tietojen havainnointia, ajatuksenkulkua ja ratkaisuyritysten monipuolisuutta.

Ratkaisukartta korostaa metakognitiivista ajattelua. Fincklin (1996, 345–368) mukaan metakognitiivisten teknikoiden käyttö mahdollistaa oppilaalle matemaattisen ratkaisuprosessin kanalta kaksi hyvin tärkeää asiaa: Ensinnäkin ratkaisijalla on mahdollisuus seurata, mitä hän on ratkaisuyrityksessään tehnyt, joten hänen on myös helpompi suunnitella, mitä tehdään seuraavaksi. Toiseksi ratkaisijalla on myös tilaisuus yhdistää ongelmanratkaisuprosessi matemaattisiin sisältötoihinsa ja menettelytapoihinsa.

Integrointi

Oppiaineiden integrointi opetuksessa on ollut muodikas puheenaihe opettajien keskuudessa. Tieteellisistä artikkeleista on kuitenkin vaikea löytää oppiaineiden integrointiin liittyviä tutkimuksia tai esimerkkejä käytännön toteutuksista. Seuraavassa on esimerkki siitä, kuinka tut-

TEHTÄVÄ 7. Ikäjärjestys

Nuorin pojista on 9-vuotias ja vanhin 16-vuotias?

- Ville on kaksi vuotta vanhempi kuin Eero.
- Justus on kolme vuotta nuorempi kuin Eero.
- Ismo on kaksi vuotta vanhempi kuin Ville.

Kuinka vanha kukin on?

7. tiedot

nuorin on 9-vuotias
vanhin on 16-vuotias
Ville on 2-vuotta vanhempi kuin Eero.
Justus on 3-vuotta nuorempi kuin Eero.
Ismo on kaksi vuotta vanhempi kuin Ville.

Ville 14.v, Justus 9.v, Ismo 16.v, Eero 12.v

8. Tiedot

koiria on 80. 80-koiraa, Varmeen 20 villakoiraa ja 20 mäyräkoiraa.
Villakoiria yhtä monta kuin mäyräkoiria.
Villakoiria on myös puolet noutajien määrästä.

20 kpl, 20 kpl, 40 kpl

TEHTÄVÄ 8. Koiranlytelyssä

Koiranlytelyssä on mäyräkoiria, noutajia ja villakoiria yhteensä 80. Villakoiria on yhtä monta kuin mäyräkoiria. Villakoirien lukumäärä on samalla puolet noutajien määrästä. Kuinka monta villakoiraa näytelyssä on?

TEHTÄVÄ 9. Pituuksia

Sarvivalaalla on lyhyemmät hampaat kuin afrikaanoorsun syösyhampaat. Sarvivalaan hampaat ovat pidemmät kuin muoran kulmahampaat. Virtahevon kulmahampaiden pituus on sarvivalaan ja muoran hampaiden välillä. Millä näistä eläimistä on lyhin hampaat?

Kuva 3 Koeryhmän oppilaan ratkaisuwihko ja ratkaisukartta.

kimuksessa käytettiin oppiaineiden integrointia apuna uuden käsitteen opetuksessa.

Tilavuus ja sen laskeminen tulivat ensimmäistä kertaa opetettavaksi aiheeksi koeryhmälle. Aluksi tilavuuden laskukaava opetettiin oppikirjan avulla. Kuvataiteen tunnilla oppilaat saivat tehtäväkseen suunnitella laivan piirustukset. Ensinnäkin oppilaille opetettiin teknisen piirtämisen perusteet ja mitataavaan piirtäminen. Mitään mallia laivasta ei näytetty, vaan sen muoto oli täysin oppilaan päätettävissä. Ainoa huomioitava teki-

jä suunnittelussa oli laivan ruuma, johon täytyi mahtua litra vettä.

Laivan rakentaminen toteutettiin teknisen työn luokassa (Kuva 4). Laivan osat mitoitettiin helposti työstettävälle PS-E-levylle, josta ne sahattiin irti. Ennen osien liimaamista laivan ruuman tilavuus laskettiin. Rakentamisen yhteydessä törmättiin jatkuvasti käytännöllisiin arkielämän ongelmatilanteisiin, esimerkiksi: Kuinka osat kannattaisi piirtää levyille, niin ettei materiaalia menisi hukkaan? Miten osat kiinnitetään väliaikaisesti, jotta ruoman tilavuus



Kuva 4 Laivan valmistaminen teknisen työn tunnilla.

saadaan laskettua? Kuinka laivan keula saadaan keskitettyä? Miten masto ja purje liitetään laivaan?

Valmiit laivat testattiin ympäristö- ja luonnontiedon tunnilla (Kuva 5). Kelluuko oma laiva? Mahtuuko siihen 1 litra? Kaatuuko laiva? Jokaisen laivan ruuman tilavuus testattiin kaatamalla sinne litran mitallinen vettä. Tämän jälkeen oppilas piirsi laivansa ruuman vesirajan yläreunaan viivan myöhempiä tarkistuslaskentaa varten. Samassa yhteydessä käsiteltiin alustavasti Arkhimedeiden lakia ja veden aiheuttamaa nostetta.

Matematiikan tunnilla oppikirjojen sijasta otettiin esiin oppilaiden valmistamat laivat (Kuva 6).

Oppilaiden tehtävänä oli laskea valmistamansa laivan ruuman tilavuus ja purjeen pinta-ala. Muita käytännön sovellustehtäviä, joilla pyrittiin osoittamaan matematiikan ja ongelmanratkaisun käyttöarvo, oli selvittää laivaan tarvittavan materiaalin määrä ja sen kustannukset.

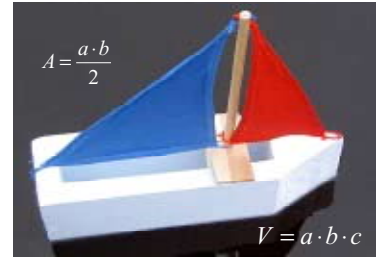
4. Tulokset

Oppimateriaali ja opettaminen

Kehittämistutkimuksen periaatteiden mukaisesti tutkimustuloksena on itse kehittämisprosessi, joka osoitti, että suunniteltu, eri oppiaineisiin integroitu ja toteutettu opetusjakso on toteuttamiskelpoinen peruskoulussa. Lisäksi tulokseksi



Kuva 5 Laivan testaaminen ympäristö- ja luonnontiedon tunnilla.



Kuva 6 Matemaattisten kaavojen havainnollistaminen oppilaan valmistamassa käsityössä.

saatiin myös konkreettinen tuotos: oppimisympäristön toteuttamiseen laaditut tuntisuunnitelmat ja tehtävät kehitettiin edelleen painetuksi oppimateriaaliksi (Leppäaho, H. 2004). Sen avulla oppimisympäristö on uudelleen toteutettavissa ja arvioitavissa.

Käytännön kokemuksen perusteella keskeistä matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettamisessa oli oppilaiden motivointi sekä matematiikan sanallistaminen ja kirjoittaminen.

Koe- ja kontrolliryhmän erot matemaattisissa ongelmanratkaisukokeissa

Kuvassa 7 on normitettu kontrolliryhmän suoritus kaikissa kolmessa kokeessa 100 prosentiksi ja siihen on verrattu koeryhmän vastaavaa tulosprosenttia.

Kehitetty oppimisympäristö osoittautui alku- ja loppukokeen tulosten mukaan tuloksekkaaksi (Kuva 7). Alkukokeessa koeryhmän keskiarvotulos oli noin 2 prosenttia heikompi kuin kontrolliryhmän tulos, mutta efektikokoon tai tilastolliseen merkitsevyyteen perustuvia eroja ryhmillä ei ollut alkumittauksessa.

Sen sijaan loppukokeessa koeryhmän kokonaistulos oli 25,3 % parempi kuin kontrolliryhmän tulos. Tilastollisesti ryhmien välinen ero oli loppukokeessa erittäin merkitsevä.

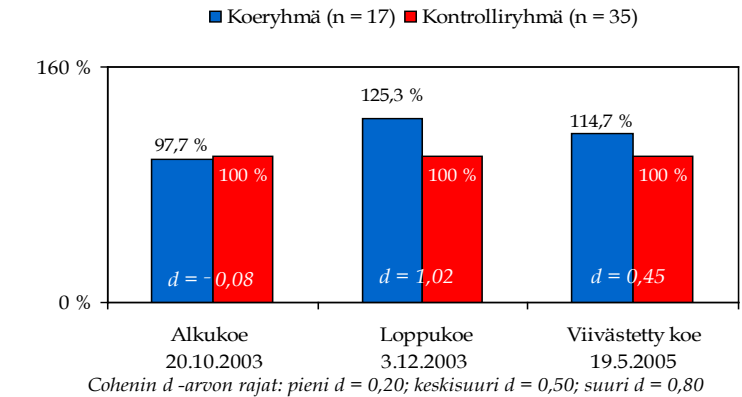
Viivästetyssä mittauksessa ryhmien kokonaistulosten välillä ei ollut enää tilastollista eroa. Ryhmi- en välistä eron suuruutta ilmaiseva *Cohenin d*-arvo lähenteli kuitenkin keskiuuren eron rajaa. Vertailta- essa keskiarvotuloksia prosentua- alisesti ero oli koeryhmän eduksi 14,7 %. Tehtäväkohtaisesti tarkas- teltuna koeryhmä oli edelleenkin kontrolliryhmää tilastollisesti pa- rempi yhdessä tehtävässä kuudes- ta viivästetyn kokeen tehtävästä.

Haastattelut

Koeryhmän oppilaiden haastattelui- den perusteella suurin osa oppilais- ta koki ratkaisukartan hyödylliseksi vaativia ongelmatehtäviä ratkotta- essa. Kurssi lisäsi tai piti ennallaan useimpien oppilaiden mielenkiin- toa ongelmatehtäviä, ongelmanrat- kaisua ja matematiikkaa kohtaan. Oppiaineisiin integroitu matemaat- tinen ongelmanratkaisukurssi ma- teriaaleineen ja sen avulla luotu oppimisympäristö koettiin yleisesti myönteiseksi sekä matematiikan ja ongelmanratkaisun opiskelua mo- tivoivaksi. Tätä johtopäätöstä tu- kevat haastattelujen lisäksi myös oppilaiden koetulokset, sillä kaikki koeryhmän oppilaat paransivat tu- loksiaan loppukokeessa.

5. Johtopäätökset

Tutkimus osoittaa, että matemaat- tisen ongelmanratkaisutaidon opet- taminen eri oppiaineisiin integroi- den on mahdollista tavallisessa kou- lussa ja se on saatujen tulosten va- lossa ongelmanratkaisutaitoa ke- hittävää. Oppiaineiden integrointi lisäsi motivaatiota matematiikan opiskelua kohtaan, etenkin niillä oppilailta, joiden suosikkiaineisiin matematiikka ei kuulunut. Tämä avannee uusia näkökulmia ongel- manratkaisutaidon kehittämiseen ja korostaa oppimisympäristön mo- nipuolisuuden merkitystä opetuk-



Kuva 7 Koeryhmän kehitys prosentteina verrattuna kontrolliryhmän tulokseen.

sessä, mikä lienee huomioimisen arvoinen seikka myös opettajan- koulutuksessa.

Tutkimuksen tavoitteena oli osaltaan myös lisätä matematiikan ja ongelmanratkaisun opetus- ta kouluissa. Kehitetty oppimateri- aali on konkreettinen yritys hel- pottaa opettajan työtä ja kannus- taa häntä aloittamaan matemaat- tisen ongelmanratkaisutaidon ope- tus luokassaan.

Käytännössä ongelmanratkai- sutaidon opettamisen ja opiskelun hyödyllisyys ei rajoitu vain tietylle oppiainealueelle. Koulunhan tulisi opettaa oppilailleen tietoja ja taito- ja elämää varten. Jokainen meistä tarvitsee ongelmanratkaisutaitoja etsiessään vastauksia elämän pie- niin ja suuriin kysymyksiin. Siksi ongelmanratkaisutaitojen tutkimi- nen ja opettaminen on hyödyllistä aloittaa jo peruskoulussa. ■

Artikkeli perustuu Henry Leppäaahon väitöskirjaan "Matemaattisen ongelmanratkaisutaidon opettaminen peruskoulussa. Ongelmanratkaisukurssin kehittäminen ja arviointi"

Väitöskirja on julkaistu sarjassa Jyväskylän Studies in Education, Psychology and Social Research nro 298, (343 s.) Jyväskylä 2007, ISSN: 0075-4625, ISBN: 951-39-2702-8. Tilaukset: Jyväskylän yliopiston kirjaston julkaisuyksikkö, puh. (014) 260 3487 tai myynti@library.jyu.fi.

Lähteet

- Cai, J. 2000. Problem based mathematics instruction: Promises and challenges—viewpoint from States. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world. Proceedings of the topic study group 11 at ICME-9 meeting August 2000 in Japan. University of Turku Faculty of Education Report Series C 14, 23–32.
- Leppäaho, H. 2004. Matematiikan ongelmanratkaisukurssi 6. luokalle. Helsinki: WSOY.
- Lester, F. K., Jr. & Kehle, P. E. 2003. From problem solving to modeling: The evolution of thinking about research on complex mathematical activity. Teoksessa R. Lesh & H. Doerr (toim.) Beyond constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum, 501–517.
- Nunokawa, K. 2005. Mathematical problem solving and learning mathematics: What we expect students to obtain. Journal of Mathematical Behavior 24, 325–340.
- Pólya, G. 1948. How to solve it? A new aspect of mathematical method. (5. painos) Princeton, NJ: Princeton University Press.
- Schoenfeld, A. 1985. Mathematical problem solving. London: Academic Press.
- Schoenfeld, A. 1992. Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense-making in mathematics. Teoksessa D. Grouws, (toim.) Handbook for Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: MacMillan, 1992.
- Schroeder, T. & Lester, F. 1989. Developing understanding in mathematics via problem solving. NCTM Yearbook, 31–42.
- Zimmermann, B. 2000. On some issues on mathematical problem solving from an European perspective. Teoksessa E. Pehkonen (toim.) Problem solving around the world. Proceedings of the topic study group 11 at ICME-9 meeting August 2000 in Japan. University of Turku Faculty of Education Report Series C 14, 55–62.