Matematiikkaa molemmille aivopuoliskoille

MAIJA SALMELA, lehtori, Helsingin matematiikkalukio

MAUNULAN YHTEISKOULU Helsingin matematiikkalukio

Olemme Maunulassa jo useana kesänä vieneet oppilasryhmän Unkariin, jossa olemme osallistuneet Balatonin rannalla pidettyyn matematiikkaleiriin. Ensimmäisillä kerroilla mukana oli vain oman koulumme lukiolaisia, mutta viime vuosina leirikouluun on ollut tulijoita myös muista lukioista.

Unkarin leireillä opittua

Leirikoulussa suomalaisten oppilaiden opettajina ovat toimineet Budapestissa sijaitsevan ELTE-yliopiston opettajat, jotka siellä vastaavat opettajainkoulutuksesta. Oppitunnin kaava tuntuu olevan se vanha tuttu, jota meilläkin opettajien koulutuksessa on opetettu oppitunnin perusrakenteena:

- aloitetaan johdattelevalla ongelmalla
- edetään uuteen asiaan pienin askelin ja osatehtävien avulla johdetaan uusi tulos

Unkarissa matematiikan opetusryhmät ovat pieniä: noin 16 oppilasta/ryhmä. Silmiinpistävä ero suomalaiseen opetukseen verrattuna ainakin matematiikkaleirillä on runsas kuvien ja geometrian käyttö. Perusteluna on, että kuvallinen ilmaisu aktivoi eri alueita aivoissa kuin looginen ajattelu. Näin saadaan laajempi aivokapasiteetti käyttöön. Lisäksi myös tunnepuoli aktivoituu. Itse en pysty tästä teoriasta sanomaan mitään, mutta käytännön tasolla tiedän niiden tehtävien, joita kohta esittelen, olleen oppilaiden mielestä hauskoja ja mielenkiintoisia.

Seuraavassa on yksi esimerkki leirillä käsitellyistä tehtävistä.

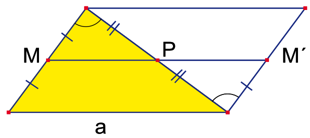
Peilaus, symmetria

Nämä käsitteet ovat saaneet meillä lisäpainoa vuoden 2004 opetussuunnitelmassa. Etenkään lukion geometriassa niitä ei juuri näe käytössä. Tässä on esimerkki, miten peilausta käytettiin hyväksi Unkarissa.

Tehtävä: Nelikulmion sivut puolitetaan ja vastakkaisten sivujen keskipisteet yhdistetään. Syntyy neljä aluetta, joista kolmen pinta-alat ovat 8, 16 ja 20. Mikä on neljännen alueen pinta-ala?

Tehtävän ratkaisu vaatii eräitä geometrian oivalluksia, joita suomalaiset oppilaat eivät ole kuulleet. Aloitetaan asioista, jotka ovat tuttuja:

1. Osoita, että kolmion kahden sivun keskipisteiden yhdysjana on kolmannen sivun suuntainen ja sen pituus on puolet kolmion kolmannen sivun pituudesta. Mikä on yhdysjanan erottaman pienemmän kolmion pinta-alan suhde alkuperäisen kolmion pinta-alaan?

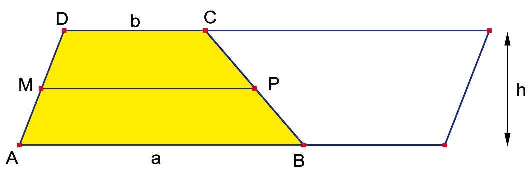


Merkitään sivujen keskipisteitä M ja P. Peilataan kolmio pisteen P suhteen. Syntyvä kuvio on suunnikas. Piste P on suunnikkaan symmetriakeskus. Tästä seuraa, että MP||a ja MP =a/2. Suomalaisittain tämä on perusteltu käyttäen yhdenmuotoisia kolmioita.

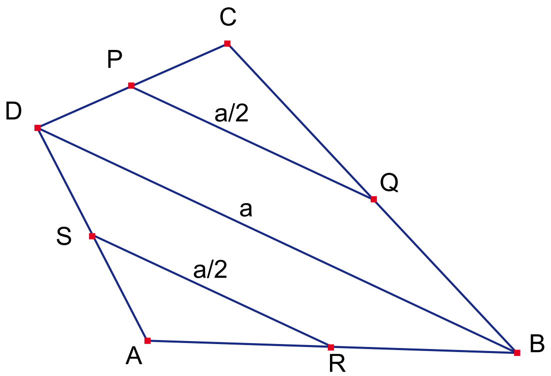
Koska pinta-alojen suhde on mittakaavan neliö, janan MP yläpuolella olevan kolmion pinta-ala on neljäsosa alkuperäisen kolmion pinta-alasta.

2. Puolisuunnikkaan pinta-alan kaava on helppo johtaa peilaamalla (Tätä tulosta ei tarvita alkuperäisen tehtävän ratkaisemisessa).

Pisteet M ja P ovat puolisuunnikkaan sivujen AD ja BC keskipisteet. Puolisuunnikas peilataan pisteen P suhteen. Syntyvä kuvio on suunnikas, jonka vaakasuorien sivujen pituus on $a + b$. Koska suunnikkaan pinta-ala on $(a + b)h$, puolisuunnikkaan pinta-ala on $\frac{a+b}{2}h$. Koska P on symmetriakeskus, seuraa tästä myös, että MP $= \frac{a+b}{2}$.

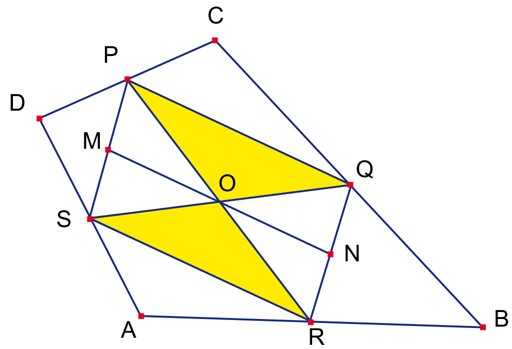


3. Nyt siirrytään tarkastelemaan nelikulmiota. Nelikulmion lävistäjä DB jakaa nelikulmion kahdeksi kolmioksi ABD ja CBD. Nelikulmion sivujen keskipisteiden yhdysjanat PQ ja RS ovat molemmat pituudeltaan puolet lävistäjästä. Kolmioiden ARS ja CPQ yhteenlaskettu pinta-ala on neljäsosa koko nelikulmion pinta-alasta, koska kumpikin kolmio on neljäsosa nelikulmion lävistäjän ja kahden sivun muodostamasta kolmiosta.



Lisäksi tiedetään, että PQ ja RS ovat yhdensuuntaiset, sillä ne ovat kumpikin lävistäjän DB suuntaiset. Pisteiden PS ja toisaalta RQ yhdysjanat ovat myös yhdensuuntaiset, sillä ne ovat lävistäjän AC suuntaiset. Nelikulmio SPQR on siis suunnikas.

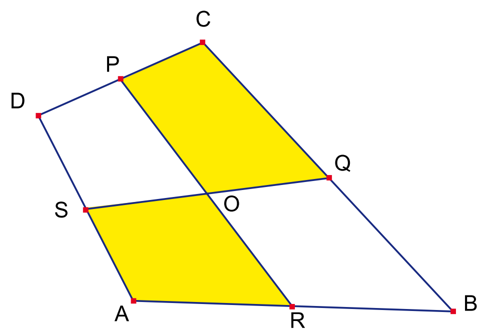
Pisteet M ja N puolittavat suunnikkaan sivut PS ja QR. Koska kolmion SOR pinta-ala on puolet suunnikkaan SMNR pinta-alasta ja kolmion POQ pinta-ala on puolet suunnikkaan PMNQ pinta-alasta, kolmioiden SOR ja POQ yhteenlaskettu pinta-ala on puolet suunnikkaan SRQP pinta-alasta.



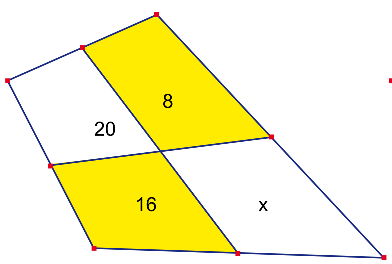
Nyt tiedetään, että suunnikkaan ulkopuolelle jäävien neljän kolmion pinta-ala on puolet nelikulmion ABCD pinta-alasta, joten suunnikkaan pinta-ala on myös puolet nelikulmion pinta-alasta.

Nelikulmiot OSAR ja OPCQ peittävät siis puolet nelikulmion ABCD pinta-alasta.

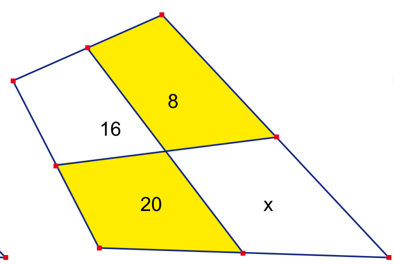
4. Palataan alkuperäiseen tehtävään. Jos kuvan nelikulmiossa kolmen alueen pinta-alat ovat 8, 16 ja 20, kuinka suuri on neljäs alue? Vastakkain olevat alueet voidaan valita kolmella tavalla, tehtävällä on siis kolme eri ratkaisua.



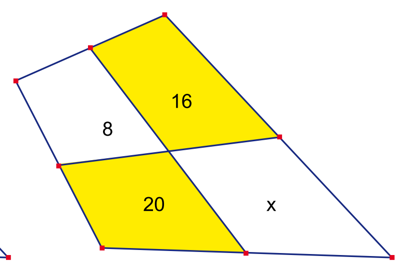
<u>Ratkaisu:</u>



$20 + x = 8 + 16$
$x = 4$



$16 + x = 8 + 20$
$x = 12$



$8 + x = 20 + 16$
$x = 28$