



Luovuus matematiikassa – Osa I

ERKKI PEHKONEN, Helsingin yliopisto, OKL

Koulumatematiikassa on luovuus usein jäänyt sivuun, kun opetus on keskittynyt laskualgoritmeihin. Mutta luovuus on ollut yhtenä peruskoulun opetussuunnitelman kaikkia aineita koskevana formaalina tavoitteena alusta alkaen (vrt. Anon. 1970) ja on sitä edelleenkin (vrt. Anon. 2004). Siksi olen opettajankoulutuslaitoksella opetuksessani 1980-luvulta alkaen tuonut esille luovuuden merkityksen myös matematiikassa ja alkanut kirjoittaa siitä (vrt. Pehkonen 1984, 1986). Tämä artikkelipari rakentuu monina vuosina opetusharjoittelijoille pitämäni luennon pohjalle; myös olen aihetta käsitellyt useilla opettajien täydennyskoulutuskursseilla. Tässä ensimmäisessä osassa käsitellään pääasiassa luovuutta ja sen yhteyttä matematiikkaan.

Elämässä selviämiseen tarvitaan koko joukko auktoriteettiä (esim. hissi toimii nappia painamalla moitteettomasti) sekä runsaasti perustietoja eri aloilta (esim. sähköän kulkeminen virtapiireissä, kun sulake on palanut). Mutta muuttuvassa yhteiskunnassa tarvitaan näiden lisäksi intuitiivista menettelyä: intuition avulla saadaan uusia ideoita ja entisen totuuden arvo asetetaan kyseenalaiseksi. Jotta ihminen pystyisi toimimaan luovasti, hänellä pitää olla riittävä määrä perustietoa, mutta hänen on oltava myös tarvittaessa valmis luopumaan siitä uutta kehitettäessä.

Yleensä ihmiset ajattelevat, että luovuudella ja matematiikalla ei ole mitään tekemistä toistensa kanssa. Tämä käsitys perustuu ihmisten koulumuistoihin, jotka ovat hyvin samansuuntaisia ja joissa matematiikka yhdistyy vahvasti laskemiseen. Luovuus taas ihmisten mielissä liittyy läheisesti mm. taiteeseen. Mutta luovuus ei ole vain taiteilijoille ja tieteilijöille kuuluvat ominaisuus, vaan se on myös osa jokapäiväistä elämää. Esimerkiksi tee-se-itse mies

toteuttaa luovaa ajattelua, kun hän puutteellisin työkaluin ratkaisee omia käytännön ongelmatilanteita. Samoin perheen ruoanlaittaja toimii luovasti kehittäessään kaapeistaan löytyvistä ruokatarvikkeista maukkaan aterian. Tästä syystä luovuuden kehittäminen on yhä edelleen peruskoulun opetussuunnitelman kaikkia aineita koskevana (formaalina) yleistavoitteena (Anon. 2004). Tästä seuraa, että luovuus on automaattisesti osa ”matematiikka kaikille”-ohjelmaa.

Logiikka ja luovuus

Matemaatikot kiistävät jyrkästi luovuuden erottamisen matematiikasta (esim. Monna 1992). Mm. Kiesswetter (1983) väittää omiin kokemuksiinsa perustuen, että joustava ajattelu on eräs tärkeimmistä ominaisuuksista, joita menestyksenkäs ongelmanratkaisija tarvitsee. Toisaalta joustava ajattelu on yksi neljästä luovuuden komponenteista Torrancen (1974) mukaan. On myös sanottu, että matematiikassa tarvitaan kahta hyvin erilaista, toisiaan täydentävää ajattelumuodista: Luovaa ajattelua, jolle on tyypillistä

”intuitio”, sekä analyyttistä ajattelua, jolle ”logiikka” on ominaista. (ks. lisää Pehkonen 2004)

Logiikka

Loogiseksi sanotaan sellaista ajattelua, joka perustuu logiikkaan. Tällöin ajatellaan logiikan olevan ns. kaksiarvoista propositiologiikkaa, jossa jokainen väite on joko tosi (1) tai epätosi (0), kolmatta vaihtoehtoa ei ole. Tämä logiikka pohjautuu Antiikin kreikkalaisten päättelysääntöihin, joiden mukaan paljon nykyäänkin matematiikassa päätellään. Näihin perustuen matemaattisessa todistamisessa käytetään jotakin kolmesta peruseräkkeestä: suora todistus, epäsuora todistus, matemaattinen induktio. Matematiikanopetuksen uudistukseen liittyen sisällytettiin 1970-luvulla lukion matematiikkaan suppea kurssi logiikkaa ja joukko-opia (esim. Lehtosaari & Leino 1971), mutta se jätettiin pois kurssisisällöistä jo seuraavalla vuosikymmenellä.

Voidaan puhua logiikan uudistamisesta, kun Yhdysvalloissa 1960-luvulla kehitettiin ns. sumea logiikka (*fuzzy logic*), jossa väite on tosi tietyllä todennäköisyydellä. Klassinen logiikka on sumean lo-

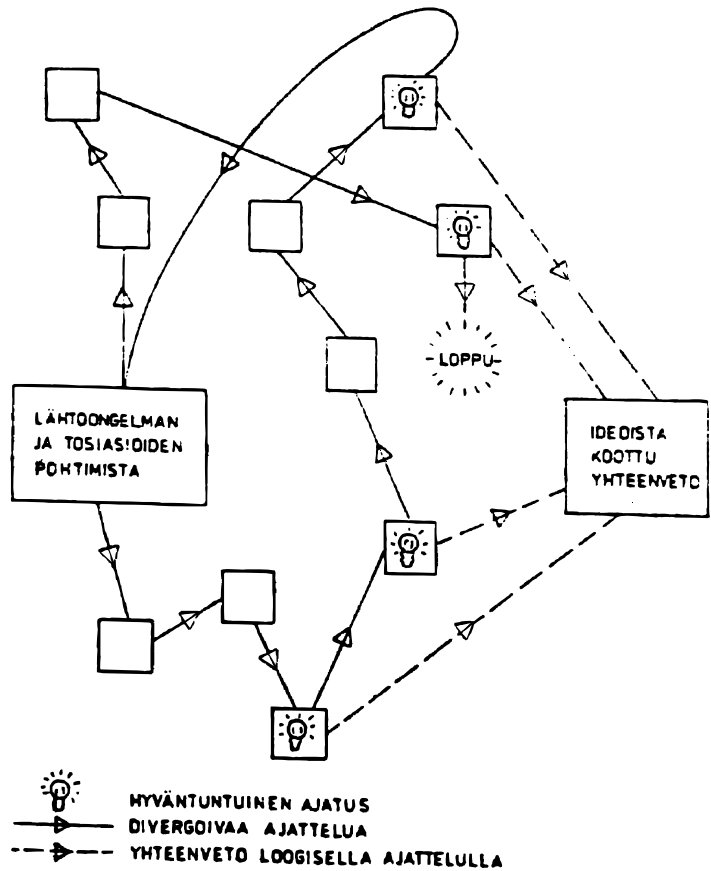


giikan erikoistapaus: tosi (100 %) ja epätosi (0 %). Sumeaa logiikkaa käyttää mm. säätöteoriassa, robotiikassa ja hahmontunnistuksessa, joissa yleensä tarvitaan vaihtoehtoja 0 ja 1 välillä. Tähän liittyen on kehitetty myös sumeaa matematiikkaa, mutta sillä ei liene kosketuskohtia koulumatematiikan kanssa.

Mitä on luovuus?

Jos tarkkailemme matemaatikon (tai jonkin muun alan tiedemiehen) toimintaa hänen lähestyessään uutta tehtävää, toteamme että hän yleensä ensin kokeilee erilaisilla erikoistapauksilla. Nämä ensimmäiset kokeilut ovat useimmiten satunnaisia, mutta ne vähitellen asettuvat tiettyyn suuntaan – tällöin matemaatikon mielessä herää ajatus mahdollisesta ratkaisusta. Kokeilujen perusteella hän saattaa asettaa hypoteesin, jota hän yrittää todistaa oikeaksi. Siksi luova toiminta (ja ongelman asettaminen) on oleellinen osa matemaatikan tekemistä eli matemaattisten ongelmien ratkaisemisesta.

Luovuus on käsite, joka on koettu hankalaksi määrittellä (ks. Haylock 1987). Kun määrittely ei ole ollut mahdollista, niin kirjallisuudessa on ollut tyypillistä kuvailla luovuus sellaisten henkilöiden käyttäytymisen kautta, joita yleisesti pidetään luovina (ts. prototyypin avulla määrittely). Erilaisissa luovuutta käsittelevissä kirjoissa voidaan lukea mm. Arkhimedeen ”Heureka”-kokemuksesta sekä Darwinin vuosia



Kuva 1. Ajattelun kulku divergoivaa ajattelua hyödynnettäessä.

kestäneestä tietojen keräämisestä ja järjestämisestä, ennenkuin hän sai idean evoluutiosta.

Luovuuskirjallisuudessa on monia kuvailuja, mutta Haylockin (1987) mukaan ei näytä olevan yhtään yleisesti hyväksyttävää määritelmää, jonka kaikki luovuustutkijat (tai suurin osa luovuustutkijoista) voisivat hyväksyä. Jokainen tutkija näyttää muotoilevan oman määritelmänsä. Seuraavassa käytämme suomalaisen neurofysiologin Matti Bergströmin käyttöön ottamaa määritelmää. Hän kuvaillee luovuutta ”esiintymisenä, jossa yksilö tuottaa jotakin uutta ja ennalta-arvaamatonta” (Bergström

1984). Bergström ottaa käyttöön käsitteet ”arkipäivän luovuus” ja ”sunnuntailuovuus”. Näistä ensimmäisellä hän tarkoittaa sellaisten uusien assosiaatioiden löytämistä, jotka ovat ennustettavissa, jos vain tunnemme ne elementit jotka assosioidaan. Tähän ilmeisesti pystyy tietokonekin sopivalla ohjelmoinnilla. Sen sijaan todellinen luovuus (jälkimmäinen) vaatii erityiset olosuhteet, sitä ei voida saavuttaa tarkoituksella eikä mekaanisin menetelmin (ibid 170). Mm. Torrance (1974) kehitti testejä luovuuden neljän komponentin mittaamiseksi: ideavuolaus, ideajoustavuus, originaalisuus, viimeistely.


$$1 + 1 = 2$$

Luovuuteen liittyviä käsitteitä

Keskeisiä käsitteitä luovuuden yhteydessä ovat älykkyys, looginen ajattelu, tunneperäinen ajattelu, mielikuvitus, divergoiva ajattelu, konvergoiva ajattelu ja luova ajattelu. Nämä käsitteet on selkeästi esitetty mm. kirjassessa Mononen & al. (1982, 11–14).

Älykkyys voitaisiin määritellä ihmisen kykynä käyttää hyväseen loogista ajattelua. On todettu, että ihmisen isojen aivojen toinen aivolohko (noin 90 % ihmisistä vasen) on erikoistunut loogiseen ajatteluun, kun taas toisen aivopuoliskon (noin 90 % ihmisistä oikea) ajattelua voidaan kuvaila sanalla tunneperäinen ajattelu (esim. Springer & Deutsch 1985). Looginen ajattelu käyttää apuvälineinä sanoja, lukuja, yms. melko tarkasti määriteltyjä käsitteitä. Sen sijaan tunneperäinen ajattelu käyttää apuvälineinä hahmoja, sen kohdalla puhutaan hahmottavasta ajattelusta.

Mielikuvitus on tunneperäisen ajattelun osa. Se käyttää apunaan paitsi oikeassa aivolohkossa olevia valmiita hahmoja myös erilaisia tilapäiskäyttöön luomiamme hahmoja. Hahmot ovat ihmisen ajattelulle tärkeitä, koska ne mahdollistavat nopean ajattelemisen. Tiedot liikkuvat käsittelyvaiheessa suurina kokonaisuuksina.

Divergoivalla ajattelulla tarkoitetaan lähinnä mielikuvitukseen perustuvaa pääasiassa ohjaamatonta ajattelua, se on usein epä-

johdonmukaisesti aiheesta toiseen hyppivää. Mononen & al. (1982, 13) kuvaa ajattelun kulkua divergoivaa ajattelua hyödynnettäessä kuvan 1 kaaviolla. Sen sijaan *konvergoiva ajattelu* on määrätietoisesti tavoitteeseen pyrkivää loogista ajattelua.

On olemassa monia tapoja määritellä luova ajattelu (vrt. McGregor 2007, 168). Hyvin yleinen kuvailu on, että *luova ajattelu* määritellään loogisen ajattelun ja divergentin ajattelun tavoitteellisenä yhdistelmänä. Kuvan 1 tilanteessa aloitetaan lähtöongelman ja siihen liittyvien tosiasioiden pohtimisella. Soveltamalla divergoivaa ajattelua (tähän on olemassa monia tekniikkoja; ks. Mononen & al. 1982) tuotetaan runsaasti ajatuksia, joista jotkut ovat hyvääntuntuisia (lamppu!). Näistä kootaan lopuksi loogisella ajattelulla yhteenveto. Samoin ratkaisun tarkistamiseen käytetään loogista ajattelua.

Luovuus voitaisiin määritellä ihmisen kykynä luovaan työhön. Luova työ voitaisiin määritellä seuraavasti: Työ on luovaa, jos sen tuloksena on sellainen ennestään tunnettujen asioiden yhdistelmä, joka on tekijälleen uusi (vrt. Bergströmin (1984) määritelmään). Luovassa prosessissa tarvitaan kumpaakin aivopuoliskoa, jolloin luovat impulssit muunnetaan erilaisia tekniikoita ja symboleja käyttämällä kommunikotaviksi tuotteiksi.

Luovuuden yhteys matematiikkaan

Ongelmanratkaisua tarjotaan yleisesti menetelmänä matemaattisen ajattelun ja luovuuden kehittämiseen (esim. Schoenfeld 1985). Tässä käytetään seuraavaa ongelman luonnehdintaa, joka on laajasti käytetty kirjallisuudessa (esim. Kantowski 1980): Tehtävän sanotaan olevan *ongelma*, jos sen ratkaiseminen vaatii, että ratkaisijan on yhdisteltävä ennestään tuttua tietoa (hänelle) uudella tavalla. Jos hän voi heti tunnistaa ne toimenpiteet, jotka tarvitaan tehtävän ratkaisemiseen, niin kyseessä on hänelle *rutini-tehtävä* (tai standarditehtävä tai harjoitustehtävä). Siispä *ongelmanratkaisu* voidaan ymmärtää prosessina, jossa aikaisemmin hankittua tietoa käytetään uudessa ja tuntemattomassa tilanteessa.

Mm. kansainvälisessä ICME-kokouksessa (Sevilla 1996) oli luovuus matematiikassa yhtenä ryhmätyöskentelyn teemana. Tässä teemaryhmässä pitivät pääesitelmän englantilainen Derek Haylock ja amerikkalainen Edward Silver. Edellinen keskittyi luovuuden määrittelyyn matemaattikon näkökulmasta (Haylock 1997) ja jälkimmäinen painottui ongelmanratkaisuun luovuuden ilmentäjänä ja kehittäjänä matematiikassa (Silver 1997). Itse olen ollut kiinnostunut luovuuden ja matemaattisen ajattelun kehittämisestä yli kaksikymmentävuotta, jolloin kirjoitin ensimmäisen artikkelini ko. aiheesta (Pehkonen 1984).

Luova ongelmanratkaisu

Ongelmanratkaisutilanteissa ratkaisija joutuu vuorottelemaan loogisen ajattelun ja luovan ajattelun välillä siirtyen ideasta toiseen, siis idean kriittisestä arvioinnista sen kehittämiseen (McGregor 2007, 173). Jotta yksilö ymmärtää milloin näitä erityyppisiä ajattelumuodeja on käytettävä, on kyettävä metakognitiiviseen prosessointiin.

Kirjallisuudessa on otettu käyttöön termi 'luova ongelmanratkaisu', jossa painotetaan nimenomaan ongelmanratkaisua luovana prosessina. *Luovaa ongelmanratkaisua* voidaan pitää laajana kokonaisvaltaisena prosessina, johon liittyy erilaisia menetelmiä, mutta ennen kaikkea vanhojen luutuneiden ajattelutapojen ja asenteiden muuntamista joustaviksi ja vastaanottavaisiksi. Pientenkin ongelmien ratkaisemiseen sisältyy aina luovuutta, kun ratkaisuun ei päädytä tavanomaista tuttua menetelmää seuraamalla vaan yhdistelemällä ja kokeilemalla erilaisia ideoita ja toimintavaihtoehtoja. Luovaan ongelmanratkaisuun liittyviä menetelmiä ovat esimerkiksi kysymyslistat, aivoriihi, tuumatalkoot ja kaukaiset ajatusmallit (ks. Sahlberg & al. 1993).

Bergström (1985) kirjoitti paljon matematiikan ja luovuuden välisestä yhteyksistä 1980-luvulla. Hän korosti kouluopetuksessa loogiikan ja luovuuden välistä tasapainoa. Jos yksilö painottaa loogista ajattelua liian paljon, hän vastaavasti vaimentaa luovuuttaan. Mitä logiikassa voitetaan, se luovuudessa menetetään, ja päinvastoin. Luovuus vaatii kehittyäkseen toiminnanvapautta ylenmääräisestä paineesta ja kontrollista.

Suomessakin matemaatikot ovat kiinnostuneet luovuuden ja matematiikan välisistä yhteyksistä (Lehtinen 2010). Matti

Lehtinen tukeutui Newsweek-lehden kansikuvajuttuun, josta hän siteerasi 'aivopuoliskojen' yhteistyötä ongelmanratkaisussa. Tällöin korostui 'vasen aivopuolisko' loogisena ja 'oikea aivopuolisko' holistisena yksikkönä. Sen sijaan Antti Viholainen esitteli Ruotsissa käynnistettyä luovuuskeskustelua (Viholainen 2010).

Tiedon merkitys ongelmanratkaisuprosessissa on hyvin tunnettu ja yleisesti hyväksytty. Mutta tutkimukset ovat näyttäneet, että kuten liian vähän tietoa myös liian paljon tietoa voi alentaa ihmisaivojen informaationprosessointikykyä ja tehokkuutta; siksi nämä molemmat ääripäät saattavat asettaa esteen luovuudelle (vrt. Bergström 1985). Yksilö, joka on saanut yksipuolisen tietopainotteisen kasvatuksen saattaa olla kyvytön käyttämään luovuuttaan, koska vastaavia osia hänen aivoistaan ei ole harjoitettu riittävästi, mutta sen sijaan estäviä osia enemmänkin.

Oppimispsykologisia tutkimustuloksia

Matematiikka koulussa ei saisi olla vain laskemista, vaan opetuksen päämääränä pitäisi olla myös ymmärtäminen ja matemaattisen ajattelun kehittäminen. Tavanomaista kouluopetusta on syytetty siitä, että se pitää täysin erillisenä toimintaa ja kontekstia, jossa oppiminen tapahtuu. Psykologiset tutkimukset ovat kuitenkin osoittaneet, että (matematiikankin) oppiminen on vahvasti tilannesidonnaista (esim. Brown & al. 1989, Collins & al. 1989, Bereiter 1990). Uusimmat oppimispsykologiset tutkimukset ovat mm. vahvistaneet Andersonin (1980) hypoteesin, että tosiasioiden ja toimintojen oppiminen tapahtuu erilaisin mekanismein (Bereiter & Scardamalia 1996). Siispä koulun

matematiikanopetukseen olisi liitettävä uusia elementtejä.

Tavanomainen opetus soveltuu hyvin tosiasioiden oppimiseen, mutta toimintatapojen oppimiseen tarvitaan uusia menetelmiä, jotka panostavat oppilaiden omaehtoiseen opiskeluun. Tähän tarjoavat avoimet oppimisympäristöt mahdollisuuden, koska niiden puitteissa käsitellään todellisia ongelmia, reagoidaan aktiivisesti ja opitaan luonnollisissa tilanteissa. Koska oppiminen toteutetaan tällöin tutkimisen ja ongelmien ratkaisujen löytämisen kautta, väitetään että sellainen aktiivinen oppiminen johtaa parempaan avainperiaatteiden ja -käsitteiden ymmärtämiseen. Aktiivinen työskentely asettaa oppilaan todelliseen ongelmanratkaisuympäristöön ja voi täten yhdistää todellisen elämän ja luokkahuoneilmiöt keskenään (Blumenfeld & al. 1991).

Tutkimuksessa on todettu, että sääntöjen ja algoritmien jatkuva painotus saattaa estää luovuuden ja ongelmanratkaisutaitojen kehittymisen (esim. Bergström 1985). Sellaiset oppimisympäristöt, jotka tarjoavat oppilaille mahdollisuuksia tutkimiseen, non-verbaaliin ilmaisuun, laboratoriotyöskentelyyn ja moniaistiseen oppimiseen, antavat oppilaille mahdollisuuksia saavuttaa uusia tasoja matematiikassa. Viimeisen kolmenkymmenen vuoden aikana on ainedidaktisen tutkimuksen puitteissa kehitetty matematiikanopetukseen tällaisia menetelmiä; erityisesti on huomattava, että ne pyritään sovittamaan yhteen konstruktivistisen oppimisenäkemyksen kanssa. Eräs useasti kirjallisuudessa kuvailtu opetusmalli on avoimien tehtävien käyttäminen ymmärtämisen tason nostamiseksi ja luovuuden edistämiseksi (ks. Pehkonen 1994).

Ideoiden kehittäminen ja muotoi-

lu, ongelmatilanteiden pohtiminen ja vaihtoehtojen punnitseminen edellyttävät oppilaiden välisistä keskustelua ja sosiaalista kanssakäymistä. Tämä olennainen osa omaehtoista, aktiivista työskentelyä on kulttuurissa luonnollinen tapa muokata ideoita, käsityksiä ja uskomuksia (Brown & al. 1989). Koulukulttuuriin on kuitenkin yleensä kuulunut keskustelun rajoittaminen. Oppimistutkimusten mukaan oppilaita tulisi kannustaa keskustelemaan vapaasti toistensa kanssa eikä suinkaan ehkäistä sitä. Ongelmaksi jää keskustelun ohjaaminen oikeaan suuntaan ja sen pysyminen asianmukaisissa puitteissa.

Avoim lähestymistapa

Kun konstruktivistinen oppimisnäkemys yli kaksikymmentä vuotta sitten valtasi alaa myös matematiikanopetuksen piirissä (vrt. Davis & al. 1990), heräsi tarve kehittää menetelmiä kohtaamaan konstruktivismiin asettamat haasteet. Eräs tällainen ratkaisu oli avoin lähestymistapa tai toiselta nimeltä avoimien ongelmatehtävien käyttäminen.

Avoimen lähestymistavan lyhyt historia. Japanissa kehitettiin 1970-luvulla ns. avoin lähestymistapa matematiikanopetukseen, jonka tavoitteena on kehittää oppilaiden luovuutta ja luokkahuoneessa mielekästä keskustelua (Shimada 1977; ks. myös Nohda 1991, Pehkonen 1995, Becker & Shimada 1997). Samoihin aikoihin Englannissa otettiin käyttöön ns. tutkimustehtävät (investigations), jotka tulivat suosituiksi matematiikanopetuksessa (William 1994). Tutkimustehtävien ideaa levitti erityisesti Cockcroft-raportti (1982). Siksi 1980-luvulla ajatus käyttää avoimia tehtäviä jossakin muodossa luokkahuoneessa levisi yli koko maailman ja tutkimus sen

mahdollisuuksista matematiikanopetuksessa oli kovin vilkasta monissa maissa (esim. Nohda 1987, 1991, 1995, Pehkonen 1989, 1995, Silver & Mamona 1989, Williams 1989, Mason 1991, Stacey 1991, 1995, Zimmermann 1991, Clarke & Sullivan 1992, Silver 1994, 1995). Joissakin maissa käytettiin erilaista nimeä avoimille ongelmille; esimerkiksi Hollannissa he kutsuvat menetelmäänsä "realistiseksi matematiikaksi" (Treffers 1991).

Ajatus käyttää avoimien ongelmia koulumatematiikassa on kirjoitettu joissakin maissa jopa opetussuunnitelmaan. Esimerkiksi Hampurin (Saksa) yhtenäiskoulun matematiikan opetussuunnitelmassa on varattu noin viidesosa opetusajasta sisältövapaaksi, jotta opettajat innostuisivat käyttämään matemaattisia aktiviteetteja (Anon. 1990). Kaliforniassa (USA) ehdotetaan avoimien ongelmien käyttämistä oppilasarviointinnissa tavanomaisten monivalintatestien rinnalla (Anon. 1991). Viktoriassa (Austraalia) on käytetty tietynlaisia avoimia ongelmia (esim. tutkimuksellisia projekteja) päättöarvioinnissa jo 1980-luvun loppupuolelta alkaen (Stacey 1995).

Jo kymmenen vuotta sitten julkaistiin joitakin kriittisiä tekstejä avoimien ongelmien käyttämisestä. Esimerkiksi amerikkalainen matemaatikko kirjoitti hyvin skeptisen artikkelin matematiikan oppimisesta avoimia ongelmia käyttäen tai tarkemmin sitä vastaan, miten avoimia ongelmia käytetään kalifornialaisissa kouluissa (Wu 1994). Kansainvälisessä PME-kokouksessa Valenciassa Paul Blanc kritisoi hyvin vahvasti tutkimustehtävien toteutusta Britannian kouluissa (Blanc & Sutherland 1996). Hän moitti, että opettajat ovat kehittäneet uuden mekaanisen rutiinin

ratkaista tutkimustehtäviä.

Avoimista tehtävistä. Lähtökohdaisesti japanilainen avoin lähestymistapa keskittyy luovuuden kehittämiseen matematiikanopetuksen puitteissa. Siinä ei olekaan keskeistä ongelmatehtävien ratkaiseminen, vaan mahdollisimman monen erilaisen ratkaisukeinon löytäminen, ts. luovuuden kehittäminen matematiikanopetuksen puitteissa. Tehtävän sanotaan olevan *avoin*, jos sen alku- tai lopputilanne ei ole tarkasti määritetty (Pehkonen 1995). Avoimien tehtävien ratkaisemisessa oppilailta on vapaus tuoda mukaan lisäoletuksia ratkaisuprosessin aikana. Tällöin he käytännössä päätyvät erilaisiin, mutta aivan yhtä oikeisiin tuloksiin. Siksi avoimilla tehtävillä on tavallisesti useita oikeita vastauksia. Avoimiin tehtäviin kuuluvat mm. arkielämän tehtävät, ongelman asettaminen, ongelmakentät (tai ongelmajonot), ongelmat joissa ei ole kysymystä, ongelmien muunnokset ("entäpä-jos"-menetelmä; Schupp 2002), projektityöt ja tutkimustehtävät (Pehkonen 1995, 1997).

Tutkimustehtäville on tyypillistä, että siinä annetaan lähtötilanne, jonka puitteissa oppilas itse muotoilee ongelmansa ja ratkaisee sen. Näitä on käytetty hyvin paljon Englannissa ja Skotlannissa (Williams 1989) sekä Australiassa (Stacey 1995). Probleeman asettamista on toista kymmentä vuotta tutkittu runsaasti USA:ssa Ed Silverin johdolla (esim. Silver 1995). Itse olen käyttänyt avoimia tehtäviä ongelmakenttien muodossa (mm. Pehkonen 1993). Opettajankoulutuslaitoksen sarjassa julkaistiin kansainvälisten tutkijoiden keskusteluryhmän alustuksia avoimien ongelmien käytömahdollisuuksista (Pehkonen 1997).

Esimerkkejä avoimista tehtävistä

Koska oppilas saa itse tutkimustehtävän puitteissa muotoilla ongelmansa ja ratkaista sen, tutkimustehtävät harjaannuttavat ongelmanratkaisun lisäksi myös ongelman asettamiseen. Käytettäessä avoimia tehtäviä matematiikanopetuksessa saavat oppilaat mahdollisuuden työkennellä aktiivimatematiikan tapaan (Brown 1997).

Tutkimustehtävät voidaan jakaa strukturoituihin ja ei-strukturoituihin. Näistä jälkimmäiset ovat Englannissa käytössä: oppilaalle annetaan tehtävätilanne ja muutama alkuongelma, jonka jälkeen he jatkavat itsenäisesti. Strukturoituja tutkimustehtäviä kutsutaan myös *ongelmakentiksi*. Niissä opettajalla on joukko jatkokysymyksiä (ongelmia) ja hän päättää luokan ratkaisuaktiiviteetin mukaan, mihin suuntaan ja miten pitkälle jatketaan. Seuraavassa on yksi esimerkki ongelmakentistä.

Esimerkki 1 (Neliön jako). Jaa neliö neljään yhtenevään osaan viidellä eri tavalla!



Koska tälle ongelmalle on olemassa useita ratkaisuja, niin voidaan jatkaa esim. seuraavilla kysymyksillä:

- Pystytkö löytämään kuudennen erilaisen ratkaisun? Entä seitsemännen?
- Kuinka monta erilaista ratkaisua arvelet olevan kaikkiaan?

Tämän jälkeen jatko riippuu siitä, mitä ryhmä saa ratkaisuihin. Ratkaisuja on itseasiassa ääretön määrä, peräti niin suuri ääretön etten ole täysin varma sen kardinaalisuuden asteesta. Mutta vastaus ei ole tärkeä, vaan luokan tutkiva ja keksivä toiminta.

Seuraava tehtävä, joka ei välttämättä ole suunniteltu kovin avoimeksi, vaikkakin on selkeästi non-standardi ongelma, on suoraan koulun matematiikan oppikirjasta Laskumatikainen 8

(Damskäg, Ekdahl & Hyvärinen 2003, s. 126, teht. 104).

Esimerkki 2. Kuinka monta prosenttia monikulmion pinta-ala kasvaa, kun sivun pituus kasvaa 25 %?

Sen yhteydessä voisi asettaa ainakin seuraavat pedagogiset kysymykset:

- Kuinka ratkaisit tehtävän itse?
- Mitä muita ratkaisutapoja löytyy?
- Miten arvelet oppilaiden ratkaisevan tehtävän?
- Miten tehtävä on mielestäsi käsiteltävä tunnilla?

Erään tarkkaavaisen opiskelijan huomio luennolla (4.2.2008) em. tehtävästä oli seuraava:

“Ei monikulmion pinta-ala aina kasva, vaikka sen sivun pituus kasvaa 25 %; pinta-ala voi myös pienentyä!”

Minkälainen monikulmio on tällöin kyseessä?

Lisää tutkimustietoon liittyviä esimerkkejä avoimien tehtävien koulusovelluksista löytyy ongelmakenttien muodossa esimerkiksi julkaisuista Pehkonen (1994) ja Rossi & Pehkonen (1995), joissa näitä on työstetty kouluopetuksen suuntaan.

Pari kymmentä vuotta sitten käsittelemme avoimia tehtäviä koulumatematiikassa esimerkein Dimensio-lehden yhdeksänsosaisessa kirjoitussarjassa (ks. Pehkonen 1988, 1989).

Lähteet

- Anon. 1970. *Peruskoulun opetussuunnitelma-komitean mietintö I*. Opetussuunnitelman perusteet. Komiteamietintö 1970: A 4. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Anon. 1990. *Lehrplan Mathematik. Lehrplan-revision Gesamtschule*. Sekundarstufe I. Behörde für Schule, Jugend und Berufsbildung, Amt für Schule. Hamburg.
- Anon. 1991. *A Sampler of Mathematics Assessments*. Sacramento (CA): California Dept of Education.
- Anon. 2004. Perusopetuksen opetussuunnitelman perusteet 2004. Helsinki: Opetushallitus.
- Becker, J.P. & Shimada, S. 1997. *The Open-Ended Approach*. Reston (VA): NCTM.
- Bereiter, C. 1990. Aspects of an Educational Learning Theory. *Review of Educational Research*, 60 (4), 603-624.
- Bereiter, C. & Scardamalia, M. 1996. Rethinking learning. In: *The handbook of education and learning. New models of learning, teaching and schooling* (eds. D.R. Olson & N. Torrance). Cambridge (MA): Blackwell.
- Bergström, M. 1984. Luovuuden ja aivotoiminta. Teoksessa: *Luovuuden ulottuvuudet* (toim. R. Haavikko & J.-E. Ruth), 159-172. Weilin+Göös: Espoo.
- Bergström, M. 1985. Ihmisäivot ja matematiikka. *Matemaattisten Aineiden Aikauskirja* 49 (3), 211-215.
- Blanc, P. & Sutherland, R. 1996. Student teachers' approaches to investigative mathematics: iterative engagement or disjointed mechanisms? In: *Proceedings of the PME-20 conference* (eds. L. Puig & A. Gutierrez), Vol. 2, 97-104. Valencia: University of Valencia.
- Blumenfeld, P.C., Soloway, E., Marx, R. W., Krajcik, J. S., Guzdial, M. & Palincsar, A. 1991. Motivating project-based learning: Substantiating the doing, supporting the learning. *Educational Psychologist*, 26 (3&4), 369-398.
- Brown, J.S., Collins, A. & Duguid, P. 1989. Situated cognition and the culture of learning. *Educational Researcher*, 18 (1), 32 - 42.
- Brown, S. I. 1997. Thinking Like a Mathematician: A Problematic Perspective. *For the Learning of Mathematics* 17 (2), 36-38.
- Brown, S.I. & Walter, M.I. 1983. *The art of problem posing*. Philadelphia (PA): Franklin Institute Press.
- Clarke, D.J. & Sullivan, P.A. 1992. Responses to open-ended tasks in mathematics: characteristics and implications. In: *Proceedings of the PME 16* (ed. W. Geeslin & K. Graham). Volume I, 137-144. Durham (NH): University of New Hampshire.
- Cockcroft, W. (Chair) (1982) *Mathematics Counts*, Report of the Committee of Enquiry into the teaching of Mathematics in Schools. London: HMSO.
- Collins, A., Brown, J.S. & Newman, S. 1989. Cognitive apprenticeship: Teaching the crafts of reading, writing and mathematics. In Resnick, L. B. (ed.) *Knowing, Learning and Instruction. Essays in Honor of Robert Glaser*. Hilldale, N.J. Lawrence Erlbaum Associates, 453 - 494.
- Davis, R.B., Maher, C.A. & Noddings, N. (eds.) 1990. Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics. *JRME Monograph Number 4*. Reston (VA): NCTM.
- Haylock, D.W. 1987. A framework for assessing mathematical creativity in schoolchildren. *Educational Studies in Mathematics* 18 (1), 59-74.
- Haylock, D.W. 1997. Recognising Mathematical Creativity in Schoolchildren. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 29 (3), 68-74.
- Kantowski, M.G. 1980. Some Thoughts on Teaching for Problem-Solving. In: *Problem solving in school mathematics* (eds. Krulik, S. & Reys, R.E.), NCTM Yearbook 1980, 195-203. Reston (VA): Council.
- Kiesswetter, K. 1983. Modellierung von Problemlöseprozessen. *Mathematikunterricht* 29 (3), 71-101.
- Lehtinen, M. 2010. Luovuudesta ja matematiikasta. *Solmu Matematiikkalehti* 3/2010, 4.
- Lehtosaari, Y. & Leino, J. 1971. *Matematiikka 10, lukion laajempi kurssi*. Helsinki: Kirjayhtymä.
- Mason, J. 1991. Mathematical problem solving: open, closed and exploratory in the UK. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23 (1), 14-19.
- McGregor, D. 2007. *Developing Thinking, Developing Learning. A guide to thinking skills in education*. McGraw Hill: Open University Press.
- Monna, A.F. 1992. *The way of mathematics and mathematicians*. CWI tract 87. Amsterdam.
- Mononen, A., Mäkelä, T., Pavela, T., Suosara, E. & Tuohi, J. 1982. *Teknisen luovuuden peruskurssi*. Ammatikasvatushallitus. Helsinki: Valtion painatuskeskus.
- Nohda, N. 1987. A study of 'open-approach method' in school mathematics. *Tsukuba Journal of Educational Studies in Mathematics* 4, 114-121.
- Nohda, N. 1991. Paradigm of the "open-approach" method in mathematics teaching: Focus on mathematical problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23 (2), 32-37.
- Nohda, N. 1995. Teaching and Evaluating Using "Open-Ended Problem" in Classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 57-61.
- Pehkonen, E. 1984. Matemaattisen ajattelun ja luovuuden kehittämisestä. Teoksessa: *Matematiikan opetuksen tutkiminen ja kehittäminen 1984* (toim. J. Leino), 31-58. Tampereen yliopiston kasvatustieteiden laitos. Julkaisusarja A: Tutkimusraportti N:o 33.
- Pehkonen, E. 1986. Luovuus peruskoulun matematiikan opetuksessa. *Dimensio* 50 (2), 38-41.
- Pehkonen, E. 1988. Avoimet tehtävät yläasteen matematiikan opetuksessa, osat 1-4. *Dimensio* 52 (6), 33-36; *Dimensio* 52 (7), 25-27; *Dimensio* 52 (8), 27-29; *Dimensio* 52 (9), 31-33.
- Pehkonen, E. 1989. Avoimet tehtävät yläasteen matematiikan opetuksessa, osat 5-9. *Dimensio* 53 (1), 39-41; *Dimensio* 53 (2), 17-19; *Dimensio* 53 (3), 62-63; *Dimensio* 53 (4), 46-47; *Dimensio* 53 (5), 47-49.
- Pehkonen, E. 1989. Der Umgang mit Problemfeldern im Mathematikunterricht der Sek. I. In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 1989*, 290-293. Verlag Franzbecker, Bad Salzdetfurth.
- Pehkonen, E. 1993. On Teachers' Criteria to Assess Mathematical Activities. In: *Proceedings of the seventeenth PME conference* (eds. I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu & F.-L. Lin). Volume I, 220-227. University of Tsukuba, Tsukuba.
- Pehkonen, E. 1994. Avoimet tehtävät vastuksena oppimisenäkemyksen esittämiin haasteisiin. Teoksessa: *Matematiikka - taitoa ajatella. Yläaste ja lukio* (toim. R. Seppälä), 60-64. Helsinki: Opetushallitus.
- Pehkonen, E. 1995. Introduction: Use of Open-Ended Problems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 55-57.
- Pehkonen, E. (ed.) 1997. *Use of open-ended problems in mathematics classroom*. University of Helsinki. Department of Teacher Education. Research Report 176.
- Pehkonen, E. 2004. Tutkiva matematiikan oppiminen - haasteita luovuudelle peruskouluissa. *Dimensio* 68 (5), 32, 36-37.
- Rossi, M. & Pehkonen, E. 1995. Tutkimustehtävät ja niiden arviointi peruskoulun matematiikassa. Helsinki: Opetushallitus.
- Sahlberg & al. 1993
- Schoenfeld, A.H. 1985. *Mathematical problem solving*. Orlando (FL): Academic Press.
- Schupp, H. 2002. Thema mit Variationen. Aufgabenvariation im Mathematikunterricht. Verlag Franzbecker: Hildesheim.
- Shimada, S. (ed.) 1977. Open-end approach in arithmetic and mathematics - A new proposal toward teaching improvement. Tokyo: Mizuumishobo. [in Japanese]
- Silver, E.A. 1994. On mathematical problem posing. In: *For the Learning of Mathematics* 14, 19-28.
- Silver, E. 1995. The Nature and Use of Open Problems in Mathematics Education: Mathematical and Pedagogical Perspectives. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 67-72.
- Silver, E.A. 1997. Fostering Creativity through Instruction Rich in Mathematical Problem Solving and Problem Posing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 29 (3), 75-80.
- Silver, E.A. & Mamona, J. 1989. Problem posing by middle school mathematics teachers. In: *Proceedings of PME-NA 11* (eds. C.A. Maher, G.A. Goldin & R.B. Davis). Volume 1, 263-269. New Brunswick (NJ): Rutgers University.
- Springer, S.P. & Deutsch, G. 1985. *Left Brain, Right Brain*. New York: Freeman (2. edition).
- Stacey, K. 1991. Linking application and acquisition of mathematical ideas through problem solving. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23 (1), 8-14.
- Stacey, K. 1995. The Challenges of Keeping Open Problem-Solving Open in School Mathematics. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 27 (2), 67-72.
- Treffers, A. 1991. Realistic mathematics education in The Netherlands 1980-1990. In: *Realistic mathematics education in primary school* (ed. L. Streefland), 11-20. Utrecht: Freudenthal Institute.
- Viholainen, A. 2010. Lisää luovuutta matematiikkaan. *Dimensio* 74 (6), 70-72.
- William, D. 1994. Assessing authentic tasks: alternatives to mark-schemes. *Nordic Studies in Mathematics Education* 2 (1), 48-68.
- Williams, D. 1989. Assessment of open-ended work in the secondary school. In: *Evaluation and Assessment in Mathematics Education* (ed. D. F. Robitaille), 135-140. Science and Technology Education. Document Series 32. Paris: Unesco.
- Wu, H. 1994. The Role of Open-Ended Problems in Mathematics Education. *Journal of Mathematical Behavior* 13 (1), 115-128.
- Zimmermann, B. 1991. Offene Probleme für den Mathematikunterricht und ein Ausblick auf Forschungsfragen. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* 23 (2), 38-46. ■