Geometrian käsitteellisen ajattelun perusteet

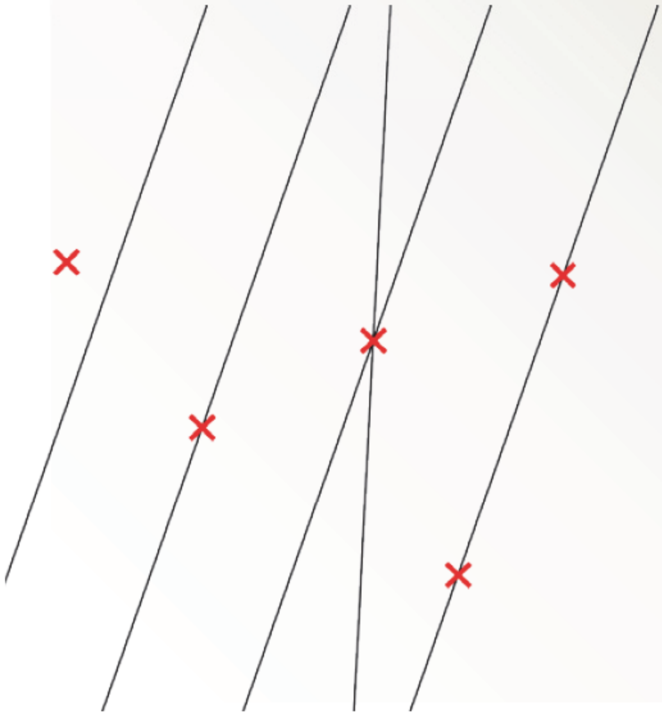
HANNU KORHONEN, lehtori emeritus, Orimattila, email: korhonen.h@gmail.com

Lukio-oppimisen erottaa perusopetuksesta olennaisemmin se, että pyritään opiskeltavien asioiden käsitteellistämiseen, toisin sanoen siihen, että opiskelu antaa välineitä asioista keskustelemiseen sekä niiden mallintamiseen ja ominaisuuksien teoreettiseen tutkimiseen. Siksi lukion alussa, ensimmäisellä geometrian kurssilla tai jossain muussa sopivassa yhteydessä on hyvä antaa jonkinlainen kokonaiskuva siitä, miten monitahoinen matematiikan ala geometria oikeastaan on. Ainoa perustelu ei suinkaan ole matematiikka, vaan tärkeämpiä ovat yleissivistys sekä nykyaikainen käsitys tilasta ja avaruudesta, mihin sisältyy kaikkea lentoreittien suunnittelun maailmankaikkeuden rakenteen väliltä.

Kyseessä on enemmänkin jonkinlainen johdatus tai esihahmotus eikä varsinainen geometrian opettaminen. Jos asiat esitetään kootusti, niin aikaa kuluu 1–3 oppituntia. Se on tosi vähän, sillä siinä käydään läpi kehitys, joka parhailta matemaatikoilta vei runsaat 2000 vuotta. Merkkipaalut ovat Eukleides noin vuodelta 300 eaa. sekä **Bolyai** ja **Lobatševski** 1800-luvulta jaa.

Eukleideen aikaansaannos oli geometrisen tiedon kokoaminen yhdeksi teokseksi – 13 kirjaksi – nimeltä Στοιχεια, Alkeet. Bolyai ja Lobatševski toivat geometriaan aivan uusia näkemyksiä, joihin perustuu nykyään esimerkiksi maailmankaikkeuden hahmottaminen yleisen suhteellisuusteorian avulla ja joita kutsutaan epäeuklidisiksi geometrioiksi.

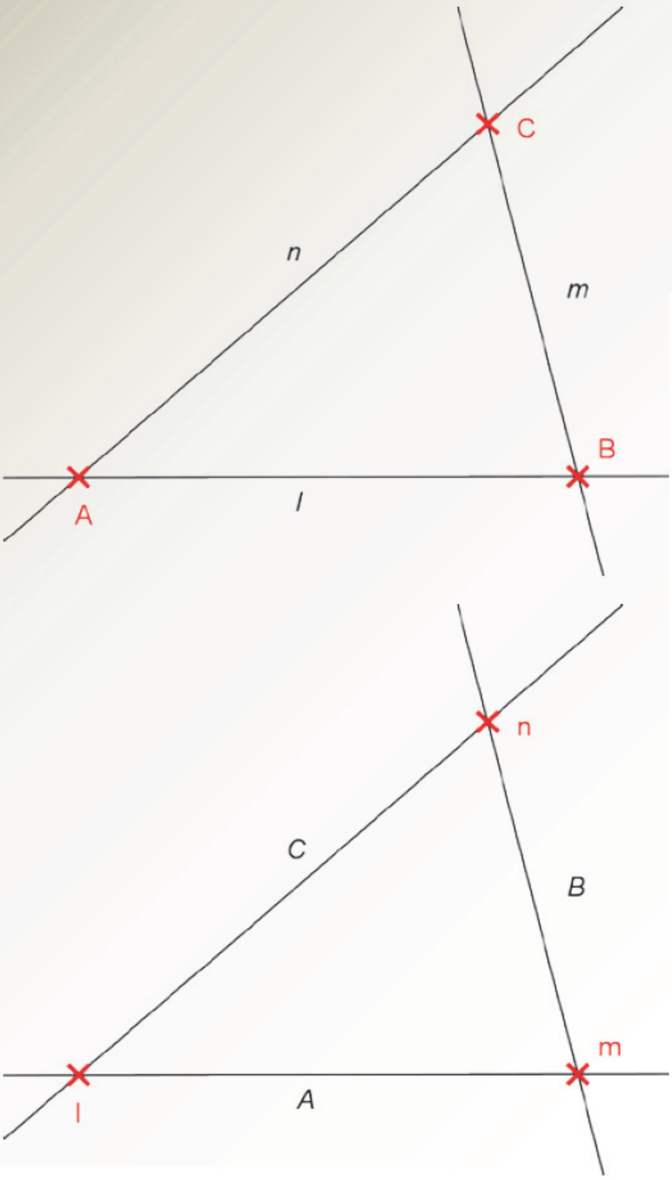
Mistä geometriassa siis on kyse? Aloitetaan peruskäsitteistä. Perusoliot, joita ei määritellä, ovat **piste** ja **suora**. Eukleides määritteli ne, mutta nykyään niin ei tehdä, vaan todetaan vain, että on olemassa kahdenlaisia olioita: pisteitä ja suoria (Kuva 1). Niihin saa liittää tavanomaiset mielikuvat, mutta ei ole pakko, niin kuin kohta nähdään. Perusolioiden välillä on suhteita, joista yksinkertaisimpia on se, että piste on suoralla tai että suora kulkee pisteen kautta.



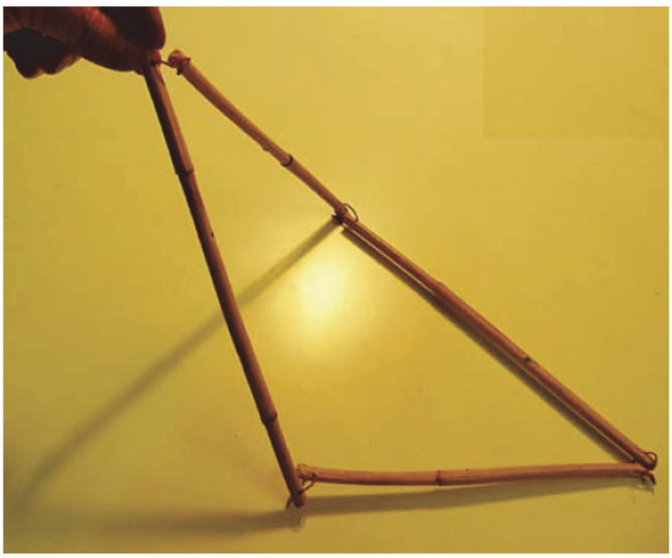
Kuva 1 Pisteitä ja suoria.

Kolmas ryhmä käsitteitä ovat perusoletukset, aksioomat. Konkreettisessa ajattelussa ne ovat niin yksinkertaisia itsestäänselvyyksiä, että niitä ei ole tarpeen edes mainita, mutta juuri näissä on geometrisen ajattelun voima ja moninaisuus. Ne ovat seuraavia.

- Kaksi pistettä voidaan aina yhdistää suoralla
- Suoraa voidaan jatkaa äärettömästi
- Voidaan piirtää ympyrä, mikä tahansa piste keskipisteenä ja mikä tahansa jana säteenä
- Suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää tasan yksi tämän suoran kanssa yhdensuuntainen suora.



Kuva 2 Duaalipari.



Kuva 3 Sivujen pituudet eivät määrää "nelikulmion" muotoa.

Koulussa geometriaa ei rakenneta perusoletuksista tai kuten sanotaan aksiomaattisesti, mutta on hyvä tietää, miten geometrinen tietomme rakentuu. Aksioomat ovat perusta. Kaikki muu saadaan niistä päättelemällä. Uusia tiedonpalasia nimitetään lauseiksi (propositio).

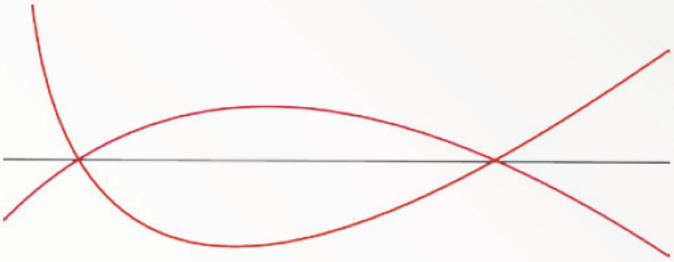
Katsotaan vielä perusolioiden keskinäistä asemaa. Jos niitä ei määritellä, niin on ihan sama kumpaa niistä nimitämme pisteeksi ja kumpaa suoraksi. Jos meillä on esimerkiksi tilanne, jossa suoralla on kaksi pistettä, niin vaihtamalla pisteen suoraksi ja suoralla olon pisteen kautta kulkemiseksi, saamme tilanteen, jossa kaksi suoraa kulkee yhden pisteen kautta. Tällaista vastaavuutta kutsutaan dualismiksi ja kuvioita duaalipariksi (kaksikko). Kolmio on hyvä esimerkki (Kuva 2).

Olkoot A, B ja C kolmion kärkipisteet ja *l*, *m* ja *n* sivujen kautta kulkevat suorat. Mikä on tämän kuvion **duaali**? Pisteet A ja B ovat suoralla *l*. Duaali on silloin: suorat *A* ja *B* kulkevat pisteen *l* kautta. Edelleen pisteet B ja C ovat suoralla *m*. Duaali on: suorat *B* ja C kulkevat pisteen m kautta. Tästä saadaan m:n sijainti. Ja vielä, pisteet A ja C ovat suoralla *n*. On siis selvää, mikä on *n*:n duaali perusolioiden vaihtamisen jälkeen.

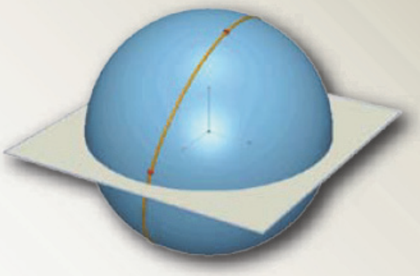
Kun geometriaa opiskellaan kynällä ja paperilla, niin häipyy taju siitä, mikä kuvioissa on olennaista. Tätä havainnollistaa esimerkiksi kolmion ja nelikulmion olennaisimman eron pohdiskelu. Se ei suinkaan ole kuvion kulmien tai sivujen lukumäärä. Ero on kuvion rakenteessa. Sivut määräävät kolmion muodon yksikäsitteisesti, mutta nelikulmiolla ei ole muotoa samassa mielessä lainkaan. Siten on äärettömän monta erilaista nelikulmiota, joilla on yhtä pitkät vastinsivut. Eikä "nelikulmion" neljän sivun tarvitse edes pysyä samassa tasossa, vaikka sivujen pituutta ei muuteta (Kuva 3).

Katsotaan vielä lopuksi, mitä Bolyai teki Eukleideen kauniille ja täydelliselle geometrian rakennelmalle. On helppo kuvitella tietävänsä, mitä tarkoitetaan suoralla: se ei poikkea suunnastaan ja se on kahden pisteen välisistä teistä lyhin. Edellinen mielikuva tuntuu luontevan tutulta eikä siinä olekaan mitään vikaa, jos geometria on tasainen. Sellaiseksi miellämme oman ympäristömme, jossa suunnat ovat vakiintunut osa ympäristön hahmottamista. On ylös-alas, pohjoiseen-etelään ja itään-länteen. Epäeuklidisten geometrioiden perusajatus on luopua tästä arkielämän suoraviivaisuuden mielikuvasta (Kuva 4).

Otetaan esimerkiksi kaareva geometria. Millainen on pallon pinnalla lyhin kahden pisteen välisistä teistä. Se on jokin pallon pintaa pitkin kulkevista kaare-



Kuva 4 Suora kulkee lyhintä tietä.



Kuva 5 Isoympyrän keskipiste on pallon keskipisteessä.

vista viivoista, mutta mikä niistä on lyhin. Se saadaan selville kiristämällä naru tai kumilanka näiden pisteiden väliin. Ei ole aivan ilmeistä, miten tämä lanka kulkee. Useiden kokeilujen tuloksena voidaan huomata, että lyhin tie kulkee sellaisessa tasossa, jossa näiden kahden pisteen lisäksi on pallon keskipiste.

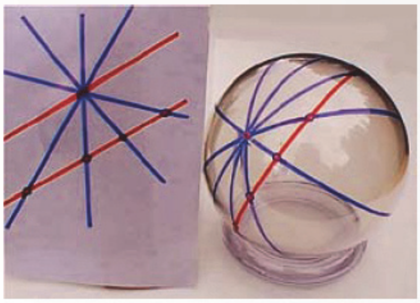
Tämän tason ja pallon leikkausviiva on suurin ympyrä, joka voidaan piirtää pallon pinnalle: **isoympyrä** (Kuva 5). Pallon geometriassa isoympyrät vastaavat siten tason suoria. Tasoon suora piirretään viivaimella. Millainen on pallogeometrian viivain? Pienen pohdinnan tuloksena havaitaan, että se on pallon pinnalle viritetty puolipallo. Palloviivaimen avulla isoympyrä voidaan piirtää tarkemmin ja kokonaan.

Tasossa suoran ulkopuolella olevan pisteen kautta voidaan piirtää tasan yksi tämän suoran suuntainen suora. Mikä on tilanne pallon pinnalla? Kokeillaan. Merkitään äsken piirtämämme suoran ulkopuolelle jokin piste. Asetetaan palloviivain kulkemaan nyt tämän pisteen kautta. Nopeasti havaitaan, että palloviivain leikkaa piirtämämme suoran aina. Pallon geometriassa ei siis voi piirtää yhtään annetun suoran suuntaista suoraa. Kaikki suorat leikkaavat toisensa (Kuva 7). Tällä on yllättäviä seurauksia.

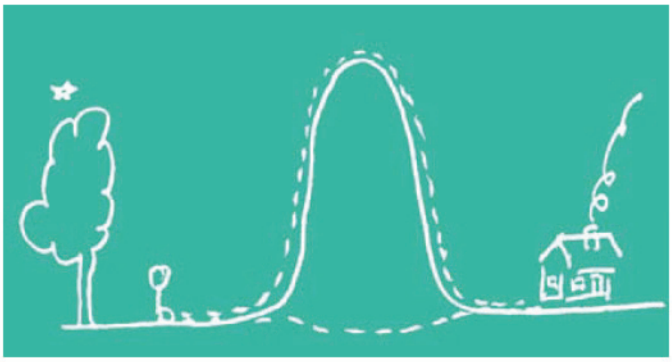
Tasossa yksinkertaisin kuvio on kolmio. Siinä on kolme kulmaa. Kulmien summa on 180°. Se saadaan piirtämällä kolme, toisiaan pareittain leikkaavaa suoraa. Kuinka monta suoraa eli isoympyrää pallon pinnalle on piirrettävä vähintään, jotta ne rajoittaisivat suljetun kuvion? Mitä erikoista on tämän kuvion kärkipisteiden sijainnissa? Mikä voisi olla tällaisen kuvion nimi? Kuinka suuri on sen kulmien summa? Onko se edes vakio? Entä kolmio, mikä on sen kulmien summa?

Kaareva geometria ei ole mielikuvitusta tai matemaatikon aksioomistaan johtama tekomaailma. Oma maailmankaikkeutemme on kaareva. Tästä on todisteena esimerkiksi gravitaatiolinssi. Valonsäde ei kuljekaan "suoraan" sanan tavanomaisessa merkityksessä, vaan kaareutuu ja silmä näkee samasta kohteesta lähteneen valon tulevan useasta suunnasta. Kohteesta näkyy siis monta identtistä kuvaa. Vastaavan ilmiön voi havaita konkreettisesti maan pinnallakin, kun lähiympäristö ei ole tasainen, vaan kaareva, kun siinä on jyrkkiä kukkuloita tai kuoppia (Kuva 8). Mitä silloin tarkoittaa "kulkea "suoraan"? Onko se "nenän osoittamaan suuntaan eteenpäin" vai ehkä "mahdollisimman vähän askelia"? ■

Kuva 6 Pallogeometrian viivain on puolipallon reuna.



Kuva 7 Pallogeometriassa ei ole yhdensuuntaisia suoria.



Kuva 8 Kaarevan geometrian alkeellinen oppituntikonkretisointi.