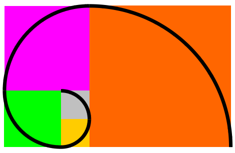


Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 1

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

Kuva 1. Simpukankuoressa oleva spiraali on yksi esimerkki lukuisista luonnosta löytyvistä Fibonaccin lukujonoa noudattavista ilmiöistä.

Fibonaccin luvut esiintyvät matematiikassa monella mielenkiintoisella tavalla. Myös luonnosta on löydettävissä Fibonaccin lukuihin liittyviä ilmiöitä. Tässä artikkelisarjassa tutustutaan näihin lukuihin, lukujen mielenkiintoisiin ominaisuuksiin, lukujen avulla saataviin tuloksiin, ihmisiin asioiden ja ideoiden takana sekä opitaan mahdollisesti jotain uuttakin lukujen käytöstä laskuissa joidenkin esimerkkien avulla. Aloitetaan tutkimusmatkamme tarinan päähenkilön ja hänen matemaattisten saavutustensa esittelyllä.

Osa 1. Tarinamme päähenkilö

Leonardo Fibonacci

Fibonacci syntyi n. 1170 ja kuoli n. 1250. Nimi Fibonacci tulee sanoista Filio Bonacci, joka tarkoittaa Bonaccion poikaa. Hän syntyi ja kuoli Pisassa Italiassa, mutta tarkkaa synnyin- ja kuolinaikaa ei ole tiedossa. Joissakin lähteissä Fibonaccin syntymävuodeksi on annettu 1180, myös vuosi 1175 esiintyy. Kuolinajat vaihtelevat myös. Fibonaccin elämästä ei tiedetä kovin paljon; esimerkiksi oliko hän naimisissa tai oliko hänellä lapsia, ei ole tiedossa. Fibonacci tunnetaan myös nimillä Leonardo Pisalainen, Leonardo Pisano, Leonardo di Pisa ja Leonardo Bigollo. Bigollo voi tarkoittaa paljon matkustellutta, kulkuria tai hajamielistä.

Fibonacci oli keskiajan merkittävin ja tuotteliain eurooppalainen matemaatikko. Hänen isänsä Gulielmus (Guglielmo) Bonaccio toimi kaupunginkirjurina 1190-luvulla Bougiessa. Kaupunki sijaitsee nykyään Algeriassa. Siellä Fibonacci sai pohjakoulutuksensa muhamettilaisen opettajansa ohjauksessa. Nuoruudessaan hän matkusteli paljon tutustuen eri maiden oppineisiin ja perehtyi kaupankäynnin laskentatapoihin. Hän havaitsi tällöin arabialaisia numeroita ja hindujen menetelmää käyttävän järjestelmän käyttökelpoisuuden.

Fibonacci toi Eurooppaan arabialaiset numerot ja niihin kuuluvan paikkajärjestelmän. Voidaan siis sanoa, että nolla on saapunut Eurooppaan Fibonaccin ansiosta. Todennäköisesti nolla on tunnettu Euroopassa joidenkin kauppiaiden ja oppineiden osalta jo ennen Fibonaccia, mutta mitään kirjallista dokumenttia nollan "eurooppalaistumisesta" ei ennen Fibonaccia tiettävästi ole. Fibonacci esitteli teoksessaan Liber Abaci intialaislähtöiset arabialaiset numerot ja myös nollan, jota arabiassa kutsutaan *zephirum*iksi (quod arabice zephirum appellatur). Englannin kielen nollaa tarkoittavat sanat zero ja cipher ovat peräisin tästä arabian kielen sanasta. Hän teki tunnetuksi sekä arabialaista että kreikkalaista matematiikkaa.

Pisassa on Fibonaccin patsas ja myös yksi kaupungin kaduista on nimetty Fibonaccin mukaan: Lungarno Fibonacci. Myös Firenzessä on Fibonaccin mukaan nimetty katu: Via Fibonacci.

Liber Abaci

Vuonna 1202 Fibonacci julkaisi mullistavan teoksensa *Liber Abaci* (esiintyy myös nimillä *Abbaci, Abbacci* tai *Abacci*), jossa hän käsitteli alkeisaritmetiikan ohella neliö- ja kuutiojuuria, käytännön geometriaa ja yhtälöjen ratkaisemista. Kirjan nimi "Helmitaulun kirja" on sikäli harhaanjohtava, ettei kirjassa käsitellä lainkaan helmitaulua. Teoksessa käytettiin kymmenjärjestelmää paikkamerkinnällä, mutta murtoluvut merkittiin edelleen ajan tavan mukaisesti ilman desimaaliesityksiä. Kirjassa käytettiin tavallisia murtolukuja, seksagesimaalisia murtolukuja ja yksikkömurtolukuja. Kirjassa on myös tavallisten murtolukujen muunnostaulukko yksikkömurtoluvuiksi.

Teos sisältää runsaasti erilaisia probleemoja joihin annetaan vastaukset keittokirjamaisilla ohjeilla. Murtoluvut kirjoitetaan nykyisenkaltaisesti murtoviivan avulla. Aiemmin murtoviivaa ei käytetty eli luku $\frac{2}{3}$ merkittiin $\genfrac{}{}{0pt}{}{2}{3}$. Kirjassa käytetään nykyisestä hieman poikkeavaa merkintätapaa luvuille; esimerkiksi luku $28\frac{5}{12}$ kirjoitetaan arabialaisittain (oikealta vasemmalle) muodossa $\frac{5}{12}28$. Murto- ja kokonaislukujen rinnakkainasettelu tarkoitti lukujen yhteenlaskua, jolloin esimerkiksi luku $11\frac{5}{6}$ merkittiin yksikkömurtolukujen avulla $\frac{1}{3}\frac{1}{2}11$.

Kirjassa annetaan myös neliöjuurten laskemiseen liittyvä approksimaatio-ohje, joka nykymerkinnöillä kirjoitettaisiin muodossa $\sqrt{x^2+y} \approx x + \frac{y}{2x}$.

Esimerkiksi $\sqrt{19} = \sqrt{4^2 + 3} \approx 4\frac{3}{8} = 4{,}375$, kun oikea kolmen desimaalin likiarvo olisi 4,359. Fibonaccin menetelmä osoittautuu tässä yllättävän tarkaksi.

Kirjassa lasketaan myös useiden peräkkäisten lukujen summia, jolloin Fibonacci päätyy nykyisenkaltaisilla merkinnöillä lausekkeeseen

$$\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}. \qquad (1)$$

Matemaatikkojen prinssi Gauss sovelsi tätä Fibonaccin kirjoittamaa kaavaa koulupoikana, kun hänen opettajansa antoi oppilaille tehtäväksi laskea kaikki luvut 1–100 yhteen. Gauss päätteli kaavan (1) menetelmän, laski summan ensimmäisenä huomattavasti muita nopeammin ja kaiken huipuksi hän sai ainoana oikean vastauksen. Gaussilla ei ollut tiedossa Fibonaccin kaavaa, vaan hän päätteli 8-vuotiaana koulupoikana asian itse.

Fibonacci esitti myös shakkiongelman ratkaisun, joka olisi nykyisillä merkinnöillä

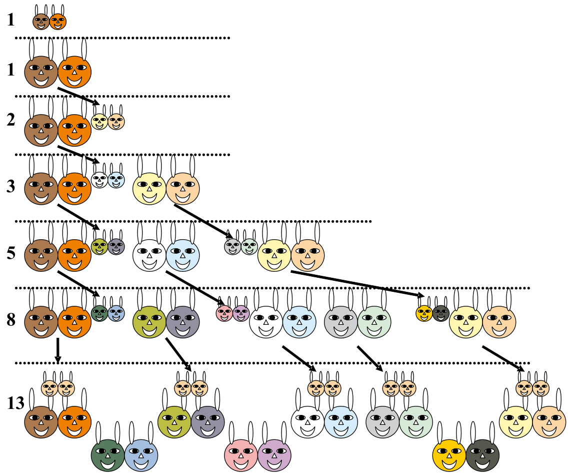
$$\sum_{k=0}^{63} 2^k = 2^{64} - 1.$$

Fibonaccin luvut

Fibonacci esitti kirjassaan Liber Abaci seuraavan ongelman.

Eräs mies laittoi aitaukseen kaniparin. Kanipari synnyttää kuukaudessa uuden kaniparin, joka tulee sukukypsäksi kuukauden iässä. Montako kaniparia on vuoden kuluttua?

Fibonacci antaa kirjassaan myös vastauksen kysymykseensä: 377. Fibonacci ei käsitellyt ongelmaa eikä sen tuottamaa lukujonoa enempää. Seuraavassa kuvassa havainnollistetaan kanien lisääntymistä.



Kuva 2. Kanien lisääntymistaulukko.

Kanien lisääntymisongelma tuottaa lukujonon 1, 2, 3, 5, 8 jne. Jonossa seuraava luku saadaan laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen. Edouard Lucas nimesi tämän lukujonon vuonna 1878 Finonaccin luvuiksi.

Muita saavutuksia

Fibonacci julkaisi muitakin matemaattisia teoksia, kuin Liber Abacin. Hänen kirjoituksiaan on jäljellä viisi erilaista, mikäli Liber Abacin pienillä lisäyksillä tehtyä uusintapainosta vuodelta 1228 ei lasketa mukaan. Kirjoituksista yksi on kirje ja muut ovat kirjoja. Yksi kirjoista on *Flos*, joka käsittelee Diofantoksen indeterminoitujen probleemien kaltaisia tehtäviä sekä Eukleideen, arabien ja kiinalaisten determinoituja probleemoja muistuttavia tehtäviä.

Fibonacci havaitsi, että Eukleideen irrationaalilukujen luokittelu on puutteellinen. Hän osoitti Flosissa, että yhtälön $x^3 + 2x^2 + 10x = 20$ juuret eivät ole konstruoitavissa harpin ja viivottimen avulla eli se on mahdoton ratkaista Eukleideen tavalla. Hän antoi tälle yhtälölle hämmästyttävän tarkan likiarvon kuuden seksagesimaalin tarkkuudella. Lieneekö Fibonaccilla ollut käytössä nykyinen Hornerin metodimme?

Teoksessaan *Liber Quadratorum* Fibonacci käsittelee nerokkaasti indeterminoitua analyysiä. Yksi teoksen tehtävistä on löytää sellainen luku, että kun siihen lisätään tai siitä vähennetään viisi, saadaan rationaaliluvun neliö. Kirjassa annetaan myös yksi vastaus em. ongelmaan: $3\frac{5}{12}$. Kirjassa esiintyy laskusääntö

$$(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ac + bd)^2 + (bc + ad)^2 = (ad + bc)^2 + (ac - bd)^2.$$

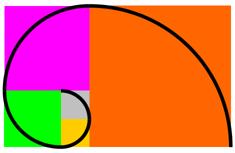
Edelliset esiintyivät jo Diofantoksen kirjoituksissa. Myös Arabit käyttivät näitä merkintöjä usein.

Vuonna 1220 Fibonacci kirjoitti kirjan *Practica Geometriae*. Teos ilmeisesti perustuu Eukleideen jo hävinneeseen Kuvioiden jakaminen -kirjaan ja Heronin mittausta käsitteleviin kirjoituksiin. Fibonaccin kirjassa on muun muassa todistus, että kolmion keskijanat jakavat toisensa suhteessa 2:1.

Elämänsä loppupuolella vuonna 1240 Fibonaccille myönnettiin palkkio yhteiskunnallisista palveluksista. Palkkioon sisältyi vuotuinen rahasumma ja lisäksi elinkustannukset katettiin. Millaisissa olosuhteissa sankarimme eli tai kuoli ei ole tietoa.

Seuraavassa osiossa keskitytään Fibonaccin lukujen mielenkiintoisiin ominaisuuksiin.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■



Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 2

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

Osa 2. Fibonaccin lukujen erikoisia ominaisuuksia

Tässä osassa tarkastelemme Fibonaccin lukujen ominaisuuksia enimmäkseen lukuteorian kannalta. Jottei osa menisi liian teoreettiseksi, katsotaan lopuksi yksi Fibonaccin lukujen sovellutus sähköopin alueella. Toki Fibonaccin lukuja löytyy myös luonnosta ja nekin ovat lukujen erikoisia ominaisuuksia. Esimerkiksi ananaksen ja männyn käpyjen suomujen kierteistä tai auringonkukan siementen kierteistä löytyy Fibonaccin lukuja. Internetistä löytyy hakusanalla phyllotaxis lukuisia esimerkkejä Fibonaccin luvuista luonnossa.

Viimeisen numeron toistuminen

Jos tarkastellaan Fibonaccin lukujen viimeistä numeroa,

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 377, …

saamme lukujonon

0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7,…

Jos jonoa jatketaan riittävän pitkälle, voidaan huomata, että jono toistuu samanlaisena 60 numeron sykleissä. Myös kahden viimeisen numeron jono toistuu samanlaisena 300 luvun sykleissä, kolmen viimeisen 1 500 luvun sykleissä, neljän 15 000 luvun sykleissä jne.

Fibonaccin lukujen neliöitä

Jos kirjoitetaan kolme peräkkäistä Fibonaccin lukua, keskimmäisen Finonaccin luvun neliö voidaan saada kahden muun Fibonaccin luvun avulla seuraavasti.

Fibonaccin lukujen neliöitä:

Peräkkäiset Fibonaccin luvut	Keskimmäisen luvun neliö
1, 1, 2	$1\cdot 2 - 1 = 1^2$
1, 2, 3	$1\cdot 3 + 1 = 2^2$
2, 3, 5	$2\cdot 5 - 1 = 3^2$
3, 5, 8	$3\cdot 8 + 1 = 5^2$
5, 8, 13	$5\cdot 13 - 1 = 8^2$

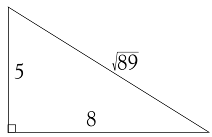
Toisin sanoen Fibonaccin lukujen F_n ja F_{n+2} tulo poikkeaa luvun F_{n+1} neliöstä vain yhdellä. Yhtälöksi puettuna tämä voidaan kirjoittaa muodossa

$F_{n-1}\cdot F_{n+1} - (F_n)^2 = (-1)^n$, missä $F_1 = 1$, $F_2 = 1$ ja $F_n = F_{n-2} + F_{n-1}$.

Tämä on ranskalaisen tähtitieteilijän Giovanni Domenico Cassinin (1625 – 1712) laatima yhtälö Fibonaccin lukuihin liittyen.

Suorakulmaisen kolmion sivujen pituuksia

Kolme peräkkäistä Fibonaccin lukua eivät voi olla minkään tasokolmion sivujen pituuksia, sillä kolmion pisin sivu on lyhyempi kuin kahden lyhyemmän sivun pituuksien summa. Toisaalta edellisen perusteella mitkään kolme erillistä Fibonaccin lukua eivät voi olla tasokolmion sivuina. Fibonaccin lukuja voidaan kyllä löytää kolmioista esimerkkinä seuraava suorakulmainen kolmio.



Kuva 1. Suorakulmainen kolmio, jossa kaikkien sivujen pituuksissa on Fibonaccin luku.

Tämä on yksi esimerkki E. Lucasin vuonna 1876 todistamasta Fibonaccin lukujen yhtälöstä

$$F_n^2 + F_{n+1}^2 = F_{2n+1} \qquad (1)$$

Jos tätä sovelletaan suorakulmaisiin kolmioihin, Pythagoraan lauseen mukaan suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet voivat siis olla

$a = F_n$, $b = F_{n+1}$ ja $c = \sqrt{F_{2n+1}}$.

Lucasin kaavasta (1) ei voi saada laadittua suorakulmaista kolmiota, jossa kateettien pituudet olisivat kokonaislukuja ja Fibonaccin lukuja sekä hypotenuusa olisi kokonaisluku ja Fibonaccin luvun neliöjuuri. John H. E. Cohn nimittäin todisti vuonna 1964, että ainoat Fibonaccin luvut, jotka ovat neliöitä, ovat $F_0 = 0 = 0^2$, $F_1 = F_2 = 1 = 1^2$, ja $F_{12} = 144 = 12^2$.

Neljän peräkkäisten Fibonaccin lukujen avulla voidaan saada suorakulmaisia kolmioita, joissa hypotenuusana on Fibonaccin luku, jos kateetit ovat $F_{n-1}\cdot F_{n+2}$ ja $2F_n \cdot F_{n+1}$. Tällöin hypotenuusa on F_{2n+1}. Nämä saadaan johdettua Lucasin kaavasta (1). Jos $n = 2$, niin suorakulmaisen kolmion sivujen pituudet ovat 3, 4, ja 5.

Alkuluvut Fibonaccin lukujen joukossa

Jos tarkastellaan, mitkä Fibonaccin luvut ovat tekijöinä muille Fibonaccin luvuille, saadaan Taulukko 1.

Taulukosta voidaan huomata, että F_n on tekijänä Fibonaccin luvuille F_n, F_{2n}, F_{3n}, … Taulukkoa jatkamalla voidaan myös huomata, että F_4, F_5, F_7, F_{11}, F_{13} ja F_{17} eivät ole jaollisia aiemmilla Fibonaccin luvuilla. Kaikki nämä luvut ovat alkulukuja, ja myös kaikkien muiden indeksi n on alkuluku, paitsi luvulla F_4. Itse asiassa kaikilla Fibonaccin alkuluvuilla luvun indeksi on alkuluku (lukuun ottamatta poikkeusta F_4). Toisinpäin väite ei päde, sillä esimerkiksi $F_{19}=4181=113\cdot37$.

Taulukon avulla voidaan myös huomata, ettei viereisillä Fibonaccin luvuilla ole yhteisiä Fibonacci-tekijöitä. Yleisemmin vierekkäisillä Fibonaccin luvuilla ei ole ollenkaan yhteisiä tekijöitä, vaan ne ovat ns. suhteellisia alkulukuja toisilleen, kun $n > 3$. Taulukossa 2 on lisää Fibonaccin alkulukuja.

Tietojeni mukaan suurin tätä kirjoitettaessa tunnettu Fibonaccin alkuluku on F_{81839}, tässä luvussa on 17103 numeroa. Vertailun vuoksi mainittakoon, että suurimmalla tunnetulla (löydetty v. 2006) alkuluvulla $2^{32582657}-1$ on 9 808 358 numeroa. Tämä on esimerkki Mersennen alkuluvuista, jotka ovat muotoa $2^p - 1$. E. Lucas kehitti menetelmiä Mersennen alkulukujen tunnistamiseen. Edellä mainittu alkuluku on löytynyt hänen kehittämiensä menetelmien avulla. Yli 10 miljoonaa numeroa sisältävän alkuluvun löytäjälle Electronic Frontier Foundation -säätiö on luvannut 100 000 \$, 100 miljoonaa numeroa sisältävästä alkuluvusta saa 150 000 \$ ja miljardista numerosta alkuluvussa palkkion suuruus on 250 000 \$. Nyt kaikki alkuluvuista innostuneet tienaamaan!

Alkuluvut Fibonaccin lukujen tekijöinä

Jo aiemmin mainittu Lucas on tutkinut myös Fibonaccin lukujen jakamista alkulukutekijöihin. Esimerkiksi alkuluku 7 jakaa mm. Fibonaccin luvut $F_8=21$, $F_{16}=987$, F_{24}, ... Jos kirjoitetaan alkulukujen alle indeksi pienimmästä Fibonaccin luvusta, jonka kukin alkuluku jakaa, voidaan havaita esimerkkejä Lucasin tutkimuksen tuloksista.

Jos F_n on pienin Fibonaccin luku, jonka alkuluku p jakaa, niin Lucasin mukaan n on joko sama tai on tekijänä luvussa $p-1$ tai $p+1$. Esimerkiksi alkuluku 13 on tekijänä F_7:ssa ja 7 on tekijänä luvussa $13+1$. Yksi poikkeus kuitenkin löytyy, jolloin $n=p$, eli $p=5$ ja $F_5=5$.

Alkuluvut Fibonaccin lukujen naapurissa

Jos tarkastellaan alkulukujen esiintymistä Fibonaccin lukujen viereisissä luvuissa, voidaan huomata, ettei alkulukuja juuri löydy.

Taulukossa 4 Fibonaccin lukujen naapureista löytyy alkulukuja vihreistä soluista. Indeksistä $n=5$ eteenpäin alkulukuja voisi löytyä vain parillisten Fibonaccin lukujen vierestä. Nämä luvut ovat aiemmin esitetyn mukaan muotoa F_{3n}. Parittomien lukujen naapurithan ovat kaikki parillisia, eli näiden vierusluvut eivät voi olla alkulukuja. Jos kirjoitetaan muotoa F_{3n} olevia Fibonaccin lukuja ja niiden vieruslukuja, voidaan huomata, ettei alkulukuja esiinny, vaikka kuinka haettaisiin. Itse asiassa Fibonaccin lukujen F_n naapurit eivät voi olla alkulukuja, kun $n > 6$ seuraavien vuonna 1996 esitettyjen yhtälöiden nojalla:

$$\begin{aligned} F_{2n} + (-1)^n &= (F_{n+2} + F_n)\cdot F_{n-1} \\ F_{2n} - (-1)^n &= (F_n + F_{n-2})\cdot F_{n+1} \end{aligned} \tag{2}$$

ja

$$\begin{aligned} F_{2n+1} + (-1)^n &= (F_{n+1} + F_{n-1})\cdot F_{n+1} \\ F_{2n+1} - (-1)^n &= (F_{n+2} + F_n)\cdot F_n \end{aligned} \tag{3}$$

Taulukko 1. Fibonaccin lukuja tekijöinä, + = rivin Fibonaccin luku jakaa pystysarakkeen Fibonaccin luvun.

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17
F_n	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377	610	987	1597
$F_3=2$	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-	+	-	-
$F_4=3$	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-	-	-	+	-
$F_5=5$	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-	-	-	+	-	-
$F_6=8$	-	-	-	+	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-
$F_7=13$	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	+	-	-	-
$F_8=21$	-	-	-	-	-	+	-	-	-	-	-	-	-	+	-

Taulukko 2. Fibonaccin alkulukuja.

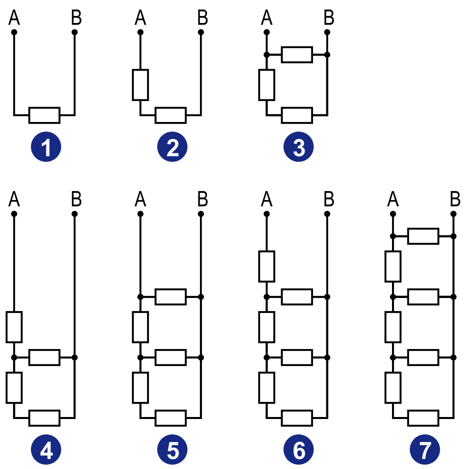
n	23	29	43	47	83
F_n	28 657	514 229	433 494 437	2 971 215 073	99 194 853 094 755 497

Taulukko 3. Alkulukuja ja pienimmän alkuluvun jakaman Fibonaccin luvun indeksi.

alkuluku p	2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53
indeksi n	3	4	5	8	10	7	9	18	24	14	30	19	20	44	16	27

Taulukko 4. Fibonaccin lukujen naapureita.

n	3		4		5		6		7		8		9		10		11		12		13	
F_n	2		3		5		8		13		21		34		55		89		144		233	
$F_n \pm 1$	1	3	2	4	4	6	7	9	12	14	20	22	33	35	54	56	88	90	143	145	232	235



Kytkentä	resistanssi Ω	resistanssi desimaalilukuna
1	1	1
2	2	2
3	2/3	≈ 0,667
4	5/3	≈ 1,667
5	5/8	0,625
6	13/8	1,625
7	13/21	≈ 0,619

Kuva 2. Vastusten kytkentöjä sekä kytkentäpisteiden A ja B välinen kokonaisresistanssi eri kytkennöillä.

Yhtälöiden nojalla esimerkiksi luvut 832 039 ja 832 041 eivät ole alkulukuja, sillä ne ovat Fibonaccin luvun F_{30} viereisiä lukuja. Yhtälöiden (2) ja (3) todistaminen perustuu ns. Lucasin lukuihin. Herra Lucas on esiintynyt tässä artikkelisarjassa jo niin useasti, että seuraavassa jaksossa lienee syytä keskittyä vain häneen.

Resistanssin laskeminen

Lopuksi esitetään Fibonaccin lukuihin ja kokonaisresistanssiin liittyvä laskenta- ja kytkentäesimerkki (Kuva 2). Tätä periaatetta voi myös soveltaa kondensaattoreihin. Lisää esimerkkejä Fibonaccin lukujen soveltamisesta tulee artikkelisarjan kuudennessa osassa.

Vastuksia, joiden resistanssi on 1 ohmi, kytketään kahden johtimen välille tikapuumaisesti siten, että johtimien välissä olevien vastusten väliin tulee vastus sarjaan kytkettynä oheisen kuvan mukaisesti.

Kokonaisresistanssin arvoissa esiintyy peräkkäiset Fibonaccin luvut. Jos kytkentöjä jatketaan annetun mallin mukaisesti, millainen kokonaisresistanssi on kytkennällä 8? Tai 9? Mikä kokonaisresistanssi tulee kytkennälle n? Mitä lukuarvoa parillisten kytkentöjen kokonaisresistanssi lähestyy, jos kytkentää kasvatetaan? Miten käy parittomien kytkentöjen kokonaisresistanssille kytkennän kasvaessa? Vastaukset kysymyksiin eDimensiossa.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■

Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 3

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

Osa 3. Edouard Lucas

Edouard Lucas (1842–1891) opiskeli Ecole Normalessa Amiensissa. Opintojensa jälkeen hän työskenteli Pariisin observatoriossa Neptunuksen löytäjänä (tai jos tarkkoja ollaan Neptunuksen radan laskijana) tunnetun Le Verrierin (1811–1877) alaisuudessa. Ranskan ja Preussin sodassa (1870–1871) Lucas palveli tykistöupseerina. Sodan päätyttyä hän toimi matematiikan professorina Lycée Saint-Louisissa Pariisissa ja myöhemmin Lycée Charlemagnessa.

Lucas tutki lukuteoriaa, erityisesti Fibonaccin lukuja ja niihin läheisesti liittyviä Lucasin lukuja. Joidenkin lähteiden mukaan hän olisi kehittänyt seuraavan kaavan Fibonaccin luvuille

$$F_n = \frac{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n}{\sqrt{5}}, \qquad (1)$$

mutta tämä tunnetaan yleisemmin Binet'n kaavana.

Yhtälö (1) voidaan esittää myös kultaisen leikkauksen suhteilla seuraavasti $F_n = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}$ (2)

Lucas kehitti metodeja alkulukujen löytämiseen. Hän todisti kehittelemiensä menetelmien avulla, että Mersennen luku $2^{127} - 1$ = 170 141 183 460 469 231 731 687 303 715 884 105 727 on alkuluku. Tämä on suurin alkuluku, joka on löydetty ilman tietokoneiden apua. Nykyisin Lucasin alkulukujen löytämiseen käyttämä menetelmä tunnetaan nimellä Lucas-Lehmer-testi, sillä Derrick Lehmer (1905–1991) kehitti Lucasin menetelmää edelleen.

Lucas kuoli juhlapäivällisillä sattuneen mitättömän onnettomuuden seurauksena. Lautanen särkyi ja siitä lentänyt siru leikkasi hänen poskeaan. Hän sai haaverin seurauksena ihoonsa ruusun ja kuoli muutaman päivän päästä.

Matematiikan viihteellistäjä

Lucas julkaisi ajanviete- tai viihteellistä matematiikkaa (recreational mathematics) sisältävän suositun neliosaisen kirjan *Récréations mathématiques* vuosina 1882–94. Seuraava tehtävä on esimerkki 1. osan tehtävistä.

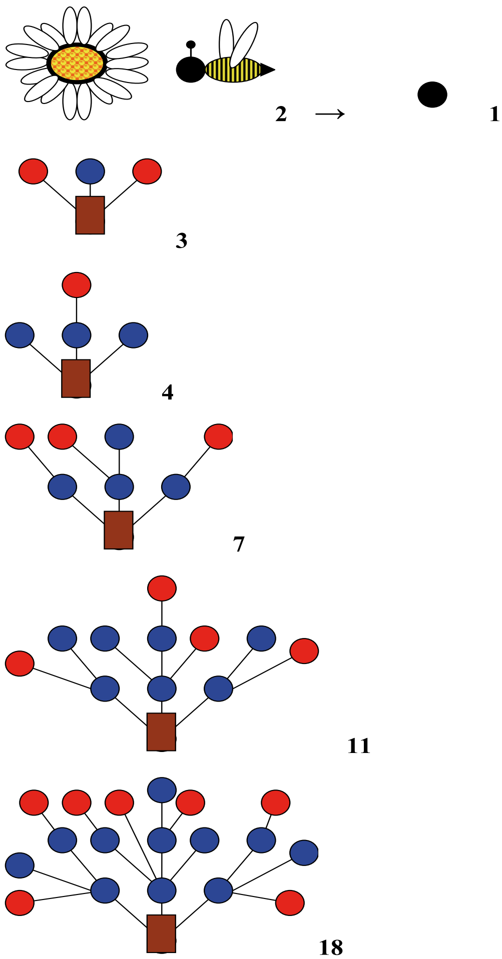
Kolme pariskuntaa haluavat ylittää joen veneellä, mutta veneeseen mahtuu vain kaksi henkilöä. Aviomiehet ovat niin mustasukkaisia, ettei vaimo voi olla hetkeäkään ilman miestään paikassa, jossa on jokin muu mies. Miten he pääsevät joen yli? (Ratkaisu tehtävään artikkelisarjan viimeisellä sivulla.)

Kirjassa on esitetty mm. Eulerin ratkaisu Königsbergin siltaongelmaan ja monia muita mielenkiintoisia matemaattisia ongelmia.

Lucas keksi myös matemaattisen pelin, joka tunnetaan nimellä Hanoin torni. Peli julkaistiin vuonna 1883. Myyntipakkauksen kannessa oli pelin keksijän nimenä professori N. Claus de Siam (anagrammi nimestä Lucas d' Amiens, hänen syntymäpaikkakuntansa) Li-Sou-Stian-nimisen kaupungin yliopistosta (anagrammi nimestä Saint-Louis, Lucasin työpaikka tuohon aikaan oli Lycée Saint-Louis).

Hanoin torni -pelissä on kolme tolppaa ja erikokoisia kiekkoja. Aluksi kaikki kiekot ovat toisessa reunassa suuruusjärjestyksessä. Kiekot pitää saada reunasta toiseen. Kiekkoja saa siirtää vain yhtä kerrallaan. Kiekon saa siirtää mihin tolppaan tahansa, mutta isompaa kiekkoa ei saa laittaa pienemmän päälle.

Kuva 1. OSAOn kone- ja metallialan opiskelijoiden koneistuksen harjoitustöinä tekemiä Hanoin torni-pelejä. Mikä on pienin määrä siirtoja, joilla tällaisen seitsemän kiekon pelin saa ratkaistuksi? Lukumäärä liittyy Lucasin löytämään aikansa suurimpaan alkulukuun.



Kuva 2. Lucasin puu.

Lucasin luvut

Lucasin lukuina tunnetaan rekursiivinen jono 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, … Kuten Fibonaccin luvuissa, myös Lucasin luvuissa jonon luku saadaan, kun lasketaan kaksi edellistä lukua yhteen. Lucasin luvut saadaan myös kaavan (2) kaltaisella tavalla

$$L_n = \Phi^n + (-\varphi)^n \tag{3}$$

Yhtälöt (2) ja (3) voidaan kirjoittaa myös muodoissa

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\Phi - (-\varphi)} \\ L_n &= \frac{\Phi^n + (-\varphi)^n}{\Phi + (-\varphi)}. \end{aligned} \tag{4}$$

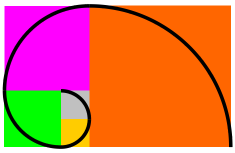
Näin saadaan lukujen välinen yhtäläisyys selvemmin esille.

Lucasin puu

Lucasin puun avulla voidaan havainnollistaa Lucasin lukuja. Yhdestä siemenestä kasvaa yksi sininen nivel (puun lehtien kasvukohta) ja kaksi punaista niveltä. Vuoden kuluttua punainen nivel on muuttunut siniseksi, sininen nivel puolestaan tekee vuodessa yhden punaisen nivelen. Puun nivelten lukumäärät tuottavat Lucasin jonon.

Seuraavassa jaksossa keskitytään Fibonaccin ja Lucasin lukujen välisiin yhtäläisyyksiin.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■

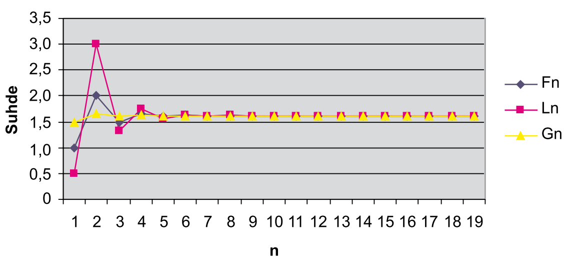


Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 4

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

OSA 4. Yhtäläisyyksiä Fibonaccin ja Lucasin lukujen välillä

Kun peräkkäiset Fibonaccin luvut tai Lucasin luvut jaetaan keskenään (jälkimmäinen jaetaan edeltäjällä), lähestytään aina kultaisen leikkauksen suhdetta. Itse asiassa tähän suhteeseen päädytään, aloitetaanpa rekursiivinen ns. yleinen Fibonaccin jono millä tahansa lukuparilla. Yleisellä Fibonaccin jonolla tarkoitetaan lukujonoa, jossa kaksi ensimmäistä lukua on annettu ja seuraavat luvut saadaan laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen, esimerkiksi $G(6, 9) = \{6, 9, 15, 24, 39, 63, \ldots\}$. Tällä jonolla ei ole yhtään yhteistä lukua Lucasin tai Fibonaccin lukujen kanssa.



Kuva 1. Fibonaccin lukujonon (Fn), Lucasin jonon (Ln) ja yleisen fibonaccin jonon G(6, 9) peräkkäisten lukujen suhde.

Fibonaccin ja Lucasin luvut Pascalin kolmiosta

Pascalin kolmion luvut voidaan saada laskemalla aiempia lukuja yhteen. Myös Fibonaccin ja Lucasin luvut saadaan yhteenlaskun avulla. Täten on luonnollista olettaa, että em. luvut voidaan saada Pascalin kolmiosta (Taulukko 1).

Taulukko 1. Pascalin kolmion ensimmäisiä rivejä.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1

Fibonaccin luvut saadaan Pascalin kolmiosta laskemalla kolmion ns. lävistäjien luvut yhteen. Helpoiten tämä idea selviää, kun Pascalin kolmio kirjoitetaan siten, että lävistäjien luvut tulevat päällekkäin taulukossa 2 esitetyllä tavalla:

Taulukko 2. Fibonaccin luvut Pascalin kolmiosta.

rivi\sarake	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1		1	1							
2			1	2	1					
3				1	3	3	1			
4					1	4	6	4	1	
5						1	5	10	10	…
6							1	6	15	…
7								1	7	…
8									1	…
Fibonaccin luvut	1	1	2	3	5	8	13	21	34	…

Myös Lucasin luvut saadaan Pascalin kolmiosta. Kolmion luvut kerrotaan sarakkeen numerolla ja tämä tulo jaetaan rivin numerolla. Laskutoimitusten tulokset lasketaan yhteen samoin kuin Pascalin luvut laskettaessa Fibonaccin lukuja (Taulukko 3).

Taulukko 3. Lucasin luvut Pascalin kolmiosta.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1		1·1/1=1	1·2/1=2							
2			1·2/2=1	2·3/2=3	1·4/2=2					
3				1·3/3=1	3·4/3=4	3·5/3=5	1·6/3=2			
4					1·4/4=1	4·5/4=5	6·6/4=9	4·7/4=7	1·8/4=2	
5						1·5/5=1	5·6/5=6	10·7/5=14	10·8/5=16	…
6							1·6/6=1	6·7/6=7	15·8/6=20	…
7								1·7/7=1	7·8/7=8	…
8									1·8/8=1	…
Lucasin luvut		1	3	4	7	11	18	29	47	…

Lukujonojen välisiä riippuvuuksia

Kun Fibonaccin ja Lucasin luvut kirjoitetaan allekkain, niiden välisiä riippuvuuksia on helpompi tarkastella.

Taulukko 4. Fibonaccin ja Lucasin lukuja.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Kun yllä olevan taulukon keltaisissa soluissa olevia lukuarvoja tarkastellaan, voidaan todeta, että viides Lucasin luku saadaan laskemalla neljäs ja kuudes Fibonaccin luku yhteen. Itse asiassa n:s lucasin luku saadaan laskemalla $(n-1)$:s ja $(n+1)$:s Fibonaccin luku yhteen, toisin sanoen

$$L_n = F_{n-1} + F_{n+1} \tag{1}$$

Lucasin luvut voidaan täten saada Pascalin kolmiosta myös toisella tavalla. Koska Lucasin luvut saadaan yhtälön (1) mukaan laskemalla kaksi Fibonaccin lukua yhteen, niin Lucasin luvut voidaan saada laskemalla Pascalin kolmiosta kaksi lävistäjää yhteen. Tämä voidaan tehdä kirjoittamalla lukukolmion rivejä kahteen kertaan ja järjestämällä kahden Pascalin kolmion luvut taulukkoon (Taulukko 5).

Myös lukuisia muita Lucasin ja Fibonaccin lukujen välisiä riippuvuuksia voidaan havaita, esimerkiksi

$$F_n = \frac{L_{n-1} + L_{n+1}}{5}.$$

Mitä muita Lucasin ja Fibonaccin lukujen välisiä riippuvuuksia löydät? Esimerkkejä riippuvuuksista kuvassa 2.

Laskuja Lucasin ja Fibonaccin luvuilla

Lucasin ja Fibonaccin lukujen välisten riippuvuuksien avulla voidaan saada monimutkaisen näköisiä juurilaskuja, jotka ovat suhteellisen helppoja konstruoida. Esimerkiksi

$$\sqrt[4]{\frac{7+3\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[4]{\frac{7-3\sqrt{5}}{2}} = 1$$

tai

$$\sqrt[7]{\frac{29+13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[7]{\frac{29-13\sqrt{5}}{2}} = 1.$$

Kun korostetaan Fibonaccin ja Lucasin lukujen taulukosta sarakkeet $n = 4$ ja $n = 7$, yllä olevat laskut voivat hieman avautua (Taulukko 7).

Taulukko 5. Lucasin luvut kahdesta Pascalin kolmiosta.

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
-1	1													
0			1											
1		1	1											
2				1	1									
3			1	2	1									
4					1	2	1							
5				1	3	3	1							
6						1	3	3	1					
7					1	4	6	4	1					
8							1	4	6	4	1			
9						1	5	10	10	5	1			
10								1	5	10	10	5	1	
11							1	6	15	20	15	6	1	
12									1	6	15	20	15	…
13								1	7	21	35	35	21	…
14										1	7	21	30	…
15									1	8	28	51	70	…
Lucasin luvut		1	3	4	7	11	18	29	47	…	…	…	…	

Taulukko 6. Viides Fibonaccin luku sekä neljäs ja kuudes Lucasin luku korostettuna.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

Taulukko 7. Sarakkeet n = 4 ja n = 7 korostettuna.

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
F_n	0	1	1	2	3	5	8	13	21	34
L_n	2	1	3	4	7	11	18	29	47	76

$$L_n = F_{n+2} - F_{n-1},$$

$$F_n = \frac{L_{n+2} - L_{n-2}}{5},$$

$$L_n = \frac{F_{n+3} + F_{n-3}}{2},$$

$$F_n = \frac{L_{n+3} + L_{n-3}}{10},$$

$$F_n + L_n = 2F_{n+1},$$

$$L_n + 5F_n = 2L_{n+1},$$

$$F_{2n} = F_n \cdot L_n,$$

$$3F_n + L_n = 2F_{n+2},$$

$$3L_n + 5F_n = 2L_{n+2}$$

$$2F_{m+n} = F_m L_n + F_n L_m,$$

$$2L_{m+n} = L_m L_n + 5F_m F_n,$$

$$F_n L_m = F_{n+m} + (-1)^m F_{n-m} \quad \text{ja}$$

$$L_n F_m = F_{n+m} - (-1)^m F_{n-m}$$

Kahden viimeisen yhtälön avulla voidaan todistaa, että Fibonaccin lukujen vierusluvut eivät voi olla alkulukuja, kun $n > 6$. Tämä esitettiin artikkelisarjan osassa 2.

Kuva 2. Esimerkkejä Lucasin ja Fibonaccin lukujen välisistä riippuvuuksista.

Jos laskujen periaate kirjoitetaan yhtälön muodossa, saadaan lauseke

$$\sqrt[n]{\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}} + (-1)^{n+1} \cdot \sqrt[n]{\frac{L_n - F_n\sqrt{5}}{2}} = 1. \tag{2}$$

Tämä voidaan esittää myös yleisemmässä muodossa

$$\sqrt[n]{\frac{L_n + F_n\sqrt{5}}{2}} + (-1)^{k+1} \cdot \sqrt[k]{\frac{L_k - F_k\sqrt{5}}{2}} = 1. \tag{3}$$

Esimerkiksi

$$\sqrt[6]{\frac{18 + 8\sqrt{5}}{2}} - \sqrt[8]{\frac{47 - 21\sqrt{5}}{2}} = 1.$$

Toisaalta yhtälön (2) mukaan saadaan

$$\sqrt[5]{\frac{11 + 5\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[5]{\frac{11 - 5\sqrt{5}}{2}} = 1 \,\|\cdot 2$$

$$\Leftrightarrow \sqrt[5]{176 + 80\sqrt{5}} + \sqrt[5]{176 - 80\sqrt{5}} = 2.$$

Vastaavia laskutemppuja voidaan tehdä myös yhtälön (3) avulla, esimerkiksi

$$\sqrt[7]{\frac{29 + 13\sqrt{5}}{2}} + \sqrt[9]{\frac{76 - 34\sqrt{5}}{2}} = 1 \,\|\cdot 4 \Leftrightarrow$$

$$\sqrt[7]{237568 + 106496\sqrt{5}} + \sqrt[9]{9961472 - 4456448\sqrt{5}} = 4.$$

Seuraavassa osassa tarkastellaan, miten kultainen leikkaus ja Fibonaccin luvut liittyvät kaikkiin luonnollisiin lukuihin.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■

Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 5

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

OSA 5. Luonnolliset luvut

Kaikki luonnolliset luvut ovat konstruoitavissa kultaisen leikkauksen tai Fibonaccin lukujen avulla. Katsotaan seuraavaksi miten.

Wythoffin peli

Hollantilainen matemaatikko Willem Abraham Wythoff (hollantilainen muoto Wijthoff, 1865–1939) analysoi nimeään kantavaa peliä vuonna 1907 *Nieuw Archief voor wiskunde* -lehden artikkelissa. Vastaava peli tunnettiin jo aiemmin kiinassa nimellä *tsyan-shidzi* (choosing stones, kivien valinta). Tasaisten monitahokkaiden yhteydessä esiintyy termi Wythoffin symboli, jolla kuvataan tasaisen monitahokkaan olemusta. Myös pallopinnan tiilitykseen liittyvä Wythoffin kaleidoskooppinen konstruktio-termi voi tulla vastaan. Nimityksissä on kyseessä sama herra, kuin on tarinamme pelin takana.

Wythoffin peli on Nim-pelin tyyppinen. Peli esiintyykin toisinaan muodossa Wythoff's nim. Pelissä on kaksi joukkoa pelimerkkejä, esimerkiksi ympyröitä kahden suorakaiteen sisällä, kiekkoja kahdessa tangossa, keksejä kahdessa paketissa jne. Pelissä poistetaan merkkejä ottamalla joko mielivaltainen määrä merkkejä pois toisesta joukosta tai ottamalla yhtä monta pelimerkkiä kummastakin joukosta. Pelaajat ottavat vuorotellen merkkejä pois esimerkiksi rastittamalla poistettavat ympyrät vähintään yksi merkki on poistettava. Se pelaaja voittaa, joka ottaa viimeisen merkin.

Taktiikka

Pelissä on sellaisia lukupareja, ns. turvallisia pareja, joihin pelaajan kannattaa pyrkiä. Wythoffin pelin turvallisia pareja eli Wythoffin lukupareja ovat (1, 2), (3, 5), (4, 7), (6, 10),… Tällöin pelaaja, jonka jälkeen jää jokin em. tilanne, voi voittaa riippumatta vastapuolen seuraavasta siirrosta.

Esimerkiksi jos tilanne on (3, 5), niin mahdollisuudet poisotolle ovat (1, 0), (1, 1), (0, 1), (2, 0), (0, 2)[b], (2, 2), (3, 0)[a], (3, 3)[a], (0, 3), (0, 4) ja (0, 5)[a]. Vaihtoehdoissa a toinen joukko jää tyhjäksi, jolloin seuraava voi ottaa jäljelle jääneen joukon tyhjäksi. Vaihtoehdossa b joukkoihin jää yhtä monta pelimerkkiä, jolloin seuraava pelaaja voi tyhjentää kummatkin joukot. Lopuissa vaihtoehdoissa seuraava pelaaja voi ottaa merkkejä pois siten, että päädytään tilanteeseen (1, 2) tai (2, 1), joka on turvallinen lukupari.

Kuva 1. OSAOn Kaukovainion tekniikan yksikön oppilaat päättivät pelimerkkien (ympyröiden) määrät kahteen joukkoon siten, että kumpikin sai päättää toisen kasan suuruuden. Aloittaja arvottiin kivi, paperi, sakset -metodilla.

Kuva 2. Tilanteen ollessa (2, 1) paljastuu, ettei voikaan voittaa.

Pelistä on kehitetty myös shakkilaudalla pelattava versio, missä yksittäinen laudalle asetettu pelinappula voi liikkua mielivaltaisen matkan vasempaan vaakasuunnassa tai alaspäin pystysuunnassa tai vasemmalle alaviistoon diagonaalisuunnassa. Pelaajat siirtävät nappulaa vuorotellen. Pelin voittaa se, joka saa nappulan ensimmäisenä vasempaan alakulmaan. Pelin yksi lukuisista Internetissä pelattavista versioista löytyy myös hakusanoilla Last Bisquit.

Wythoffin lukuparit ja lattiafunktio

Turvalliset lukuparit voidaan määrittää lattiafunktion (engl. floor) avulla. Lattiafunktion arvo luvulla *x* on suurin kokonaisluku, joka ei ole suurempi kuin *x*. Jos luku on positiivinen, lattiafunktio on siten sama kuin kokonaisosafunktio. Lattiafunktiolle käytetään merkintää $\lfloor x \rfloor$. Esimerkiksi $\lfloor 4{,}78 \rfloor = 4$, $\lfloor e \rfloor = 2$, $\lfloor -\pi \rfloor = -4$ ja $\lfloor 5 \rfloor = 5$. Turvalliset lukuparit (Ar, Br) saadaan $(\lfloor \Phi r \rfloor, \lfloor \Phi r \rfloor + r)$, kun $r = 1,2,3\ldots$ ja Φ on kultainen leikkaus. Koska $\Phi r + r = \Phi^2 r$, lukuparit saadaan myös $(\lfloor \Phi r \rfloor, \lfloor \Phi^2 r \rfloor)$.

Taulukko 1. Wythoffin pelin turvallisia pareja.

r	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
A_r	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
B_r	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Taulukossa keltaisissa soluissa olevat luvut ovat Fibonaccin lukujonon lukuja, eli

$$A_1, B_1, A_{B_1}, B_{B_1}, A_{B_{B_1}}, B_{B_{B_1}}, \ldots = 1,2,3,5,8,13,21,34 \ldots$$

Samalla tavalla, jos aloitetaan vaikka luvuista 4 ja 7, saadaan vastaavasti yleinen Fibonaccin jono, jossa aloitetaan luvuilla 4 ja 7:

$$A_3, B_3, A_{B_3}, B_{B_3}, A_{B_{B_3}}, B_{B_{B_3}}, \ \ldots = 4,7,11,18,29,37, \ldots$$

eli nämä ovat Lucasin lukuja.

Beattyn jonot

Turvallisten parien taulukosta löytyvät kaikki luonnolliset luvut kertaalleen, toisin sanoen yksikään luku ei toistu taulukossa ja kaikki luonnolliset luvut löytyvät luettelosta. Tämä on yksi esimerkki sellaisista Beattyn jonoista *A* ja *B*, jotka sisältävät kaikki luonnolliset luvut.

Beattyn jonot määritellään lattiafunktion sekä positiivisten irrationaalilukujen α ja β avulla siten, että

$$A = \lfloor \alpha \rfloor \lfloor 2\alpha \rfloor \lfloor 3\alpha \rfloor \ldots \text{ ja } B = \lfloor \beta \rfloor \lfloor 2\beta \rfloor \lfloor 3\beta \rfloor \ldots$$

Jos irrationaaliluvut α ja β toteuttavat yhtälön

$$\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1,$$

niin jonot *A* ja *B* sisältävät kaikki luonnolliset luvut ilman toistoa.

Samuel Beatty (1881–1970) julkaisi vuonna 1926 American Mathematical tMonthly -lehdessä ongelman liittyen edellä mainittuihin, hänen nimeään kantaviin jonoihin. Beatty oli ensimmäinen kanadalaisesta yliopistosta valmistunut matematiikan alan tohtori. Hänen väitöskirjaansa ohjasi J. C. Fields (1863–1932), jonka kunniaksi on nimetty ”matemaatikkojen Nobel”, eli Fieldsin mitali. Fieldsin mitalista mainittakoon, että ensimmäiset Fieldsin mitalit saivat suomalainen Lars Ahlfors (1907–1996) ja yhdysvaltalainen Jesse Douglas (1897–1965) vuonna 1936.

Wythoffin taulukko

Wythoffin taulukko saadaan, kun Wythoffin parit järjestetään yleisten Fibonaccin lukujonojen mukaisesti siten, että kirjoitetaan ensimmäinen lukupari (1, 2) vaakariville ja sen vaakarivin loput luvut saadaan laskemalla yhteen kaksi edellistä rivin lukua (Taulukko 2). Wythoffin parien luettelosta poistetaan nämä kirjoitetut luvut. Seuraava vaakarivi aloitetaan kahdella ensimmäisellä jäljellä olevalla Wythoffin lukuparilla (4, 7), joiden jälkeen tulevat luvut saadaan rekursiivisesti laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen. Poistetaan myös nämä luvut Wythoffin parien joukosta. Menetelmää jatkamalla saadaan aikaiseksi Wythoffin taulukko (Taulukko 3).

Wythoffin taulukon ensimmäinen rivi koostuu Fibonaccin lukujonon luvuista, toisen rivin luvut ovat Lucasin jonon lukuja ja loput rivit ovat yleisiä Fibonaccin lukujonoja. Jokainen rivi alkaa pienimmällä luvulla, jota ei löydy ylemmiltä riveiltä. Lisäksi taulukosta löytyy jokainen positiivinen kokonaisluku täsmälleen yhden kerran (1). Taulukon erikoisia ominaisuuksia on myös, että jos rivin S *k*:s luku on rivin R lukujen $(k-1)$ ja $(k+1)$ välissä (tai yleisemmin rivin R lukujen (x) ja $(x+n)$), kaikki rivin S luvut $(k+a)$ ovat vastaavalla tavalla rivin R lukujen $(k+a-1)$ ja $(k+a+1)$ välissä (2) (yleisemmin lukujen $(x+a)$ ja $(x+a+n)$ välissä). Luvut kasvavat taulukon sarakkeissa alaspäin ja riveillä oikealle (3). Sellaista lukutaulukkoa, joka toteuttaa lauseiden (1), (2) ja (3) ehdot, kutsutaan englannin kielellä termillä *interspersion*. Suomalainen vastine voisi olla *sirotelma*.

Taulukko 2. Wythoffin parien poimiminen.

	RIVI 1	RIVI 1	RIVI 2	RIVI 3	RIVI 1	RIVI 4	RIVI 2	RIVI 5	RIVI 6	RIVI 3	RIVI 7	RIVI 8	RIVI 1
An	1	3	4	6	8	9	11	12	14	16	17	19	21
Bn	2	5	7	10	13	15	18	20	23	26	28	31	34

Taulukko 3. Wythoffin taulukko.

RIVI 1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377
RIVI 2	4	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364
RIVI 3	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754	1220	1974
RIVI 4	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1131	1830	2961
RIVI 5	12	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1508	2440	3948
RIVI 6	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1076	1741	2817	4558
RIVI 7	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1309	2118	3427	5545
RIVI 8	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1453	2351	3804	6155
RIVI 9	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	1686	2728	4414	7142
RIVI 10	25	41	66	107	173	280	453	733	1186	1919	3105	5024	8129
RIVI 11	27	44	71	115	186	301	487	788	1275	2063	3338	5401	8739
RIVI 12	30	49	79	128	207	335	542	877	1419	2296	3715	6011	9726
RIVI 13	33	54	87	141	228	369	597	966	1563	2529	4092	6621	10713
RIVI 14	35	57	92	149	241	390	631	1021	1652	2673	4325	6998	11323

Vaihtoehtoinen tapa Wythoffin taulukon konstruoimiseen

Wythoffin taulukkoa ei ole pakko tehdä Wythoffin lukuparien avulla, vaan taulukko voidaan tehdä myös kultaisen leikkauksen Φ ja lattiafunktion avulla taulukon 4 mukaan.

Tämän periaatteen mukaisesti Wythoffin taulukon rivin n sarakkeen c luku $a_{n,c}$ saadaan lattiafunktion, kultaisen leikkauksen ja Fibonaccin lukujen F_k avulla seuraavasti:

$$a_{n,c} = \lfloor (n+1)\cdot \Phi \rfloor \cdot F_{c+2} + n \cdot F_{c+1} \,.$$

Koska Wythoffin taulukko sisältää kaikki luonnolliset luvut, edellä esitetyn periaatteen mukaan kaikki luvut ovat konstruoitavissa kultaisen leikkauksen ja Fibonaccin lukujen avulla.

Wythoffin taulukko voidaan tehdä myös ilman lattiafunktiota. Wythoffin taulukon generoivat luvut (keltaisissa soluissa) voidaan saada suoraan Fibonaccin lukujonon avulla. Ensimmäisen rivin aloittavat ja generoivat luvut 0 ja 1 (Fibonaccin lukujonon 0. ja 1. luku). Toisen rivin aloittaa luku 1. Etsitään aiemmalta riviltä harmailta soluilta lukua 1 seuraava luku (2), johon lisätään yksi (2 + 1 = 3) ja toinen rivi saadaan generoitua näiden lukujen avulla, eli luvuilla 1 ja 3.

Taulukko 4. Wythoffin taulukon ensimmäisiä lukuja kultaisen leikkauksen ja lattiafunktion avulla.

n	$\lfloor (n+1)\cdot \Phi \rfloor$	Wythoffin taulukko, saadaan yleisen fibonaccin jonon periaatteen mukaisesti laskemalla rivin kaksi edellistä arvoa yhteen					
		c = 0	c = 1	c = 2	c = 3	c = 4	c = 5
0	1	1	2	3	5	8	13
1	3	4	7	11	18	29	47
2	4	6	10	16	26	42	68
3	6	9	15	24	39	63	102
4	8	12	20	32	52	84	136
5	9	14	23	37	60	97	157
6	11	17	28	45	73	118	191

Kolmas rivi alkaa luvulla 2. Lukua 2 seuraava luku kolmannen rivin yläpuolisista harmaan alueen luvuista on 3, johon lisätään yksi ja saadaan tämän rivin toinen generoiva luku (3 + 1 = 4). Neljäs rivi alkaa luvulla 3, jolle seuraaja yläpuolisissa riveissä on 5. Kun lukuun 5 lisätään yksi, saadaan neljännen rivin toinen generoiva luku. Vastaavasti viides rivi alkaa luvulla 4, jonka seuraaja yläpuolisissa riveissä on 7, eli viidennen rivin toinen generoiva luku on 8. Tällä tavalla jatkamalla saadaan Wythoffin taulukko täytettyä.

Zeckendorfin esitys luvuille

Edouard Zeckendorf (1901–1983) oli koulutukseltaan lääkäri ja hammaskirurgi. Hän palveli Belgian armeijassa lääkintäjoukoissa aina vuoteen 1957 asti. Hän oli amatöörimatemaatikko, jolla oli useita matemaattisia julkaisuja.

Zeckendorfin esitys luvuille perustuu Fibonaccin lukuihin. Aiemmin esitetyn perusteella kaikki luonnolliset luvut ovat esitettävissä Fibonaccin lukujen avulla. Toisaalta kaikki luvut ovat esitettävissä Fibonaccin lukujen summien avulla, esimerkiksi $12 = \overbrace{6\cdot 2}^{2+2+2+2+2+2} = \overbrace{4\cdot 3}^{3+3+3+3} = \overbrace{2\cdot 5}^{5+5}+2$, tai vaihtoehtoisesti

$12 = 8 + 3 + 1$. Ensimmäisessä tapauksessa luku 12 esitetään siten, että Fibonaccin lukuja kerrotaan jollakin kertoimella, jolloin luvun esitystapoja voi olla useita. Yksittäinen Fibonaccin luku esiintyy vain kertaalleen jälkimmäisessä tapauksessa. Zeckendorfin esitys perustuu jälkimmäiseen tapaan. Zeckendorfin esityksessä käytetään lukumääräisesti mahdollisimman vähän Fibonaccin lukuja, eli kaksi peräkkäistä Fibonaccin lukua ei voi esiintyä tässä lukuesitysmuodossa. Zeckendorf ei julkaissut ideaansa itse, vaikka kertookin ideansa olleen todistuttuna jo vuonna 1939. Ensimmäisen julkaisun luonnollisten lukujen esittämisestä Fibonaccin lukujen summien avulla on tiettävästi tehnyt hollantilainen matemaatikko C. G. Lekkerkerker (1922–1999) vuonna 1952.

Taulukko 5 havainnollistaa Zeckendorfin esitystä.

Zeckendorfin esitys perustuu Fibonaccin lukujen käyttämiseen kantalukuina. Oma lukujärjestelmämme perustuu 10-kantaiseen lukujärjestelmään, jonka Fibonacci toi Eurooppaan teoksessaan Liber Abaci, mutta kuten tiedämme, myös muita kantalukuja voidaan käyttää. Esimerkiksi binääriluvuissa kantalukuna on luku 2. Zeckendorfin esitystä ei kuitenkaan pidä sekoittaa binäärilukuihin, vaikka ne muistuttavatkin toisiaan. Kun muuta kuin kymmenkantaista lukuesitystä käytetään artikkelisarjassa myöhemmin, sekaannusten välttämiseksi luvun numeroesityksen jälkeen käytetään alaindeksinä lukuesityksen kantaa kuvaavaa nimitystä, ellei lukuesityksen kanta muuten tule selkeästi ilmi. Esimerkiksi $9 = 1001_2 = 10001_{\text{fib}}$.

Taulukko 5. Fibonaccin lukuja ja Zeckendorfin esitys eräille luvuille. Fibonaccin lukuja, x = ne Fibonaccin luvut, joiden summa on sama kuin luku a.

Luku a	89	55	34	21	13	8	5	3	2	1	Zeckendorfin esitys luvulle a
1										x	1
2									x		10
3								x			100
4								x		x	101
5							x				1000
6							x			x	1001
7							x		x		1010
8						x					10000
9						x				x	10001
10						x			x		10010
11						x		x			10100
12						x		x		x	10101
13					x						100000
14					x					x	100001
15					x				x		100010
20					x		x		x		101010
30						x				x	1010001
40			x				x			x	10001001
50			x		x			x			10100100
60		x					x				100001000
70		x			x				x		100100010
80		x		x				x		x	101000101
90	x									x	1000000001
100	x					x		x			1000010100

Wythoffin taulukko Zeckendorfin esityksen mukaan

Mikäli Wythoffin taulukko esitetään Zeckendorfin esityksen mukaisesti, saadaan Taulukko 6.

Taulukosta 6 voidaan huomata, että ensimmäinen pystysarake päättyy aina ykköseen, toisen pystysarakkeen luvut saadaan saman vaakarivin ensimmäisen sarakkeen luvusta lisäämällä luvun loppuun nolla, kolmannen sarakkeen lukuihin lisätään kaksi nollaa jne.

Stolarskyn taulukko

Wythoffin taulukko ei ole ainutlaatuinen kaikki luonnolliset luvut sisältävä taulukkoesitys, joka perustuu rekursiivisesti määriteltyihin jonoihin ja on sirotelma.

Taulukko 6. Wythoffin taulukon lukuja Zeckendorfin esityksen avulla.

1	10	100	1000	10000	100000	1000000
101	1010	10100	101000	1010000	10100000	101000000
1001	10010	100100	1001000	10010000	100100000	1001000000
10001	100010	1000100	10001000	100010000	1000100000	10001000000
10101	101010	1010100	10101000	101010000	1010100000	10101000000
100001	1000010	10000100	100001000	1000010000	10000100000	100001000000
100101	1001010	10010100	100101000	1001010000	10010100000	100101000000

Kultaisen leikkauksen avulla voidaan määrittää myös vastaavat ominaisuudet omaava erilainen taulukko, Stolarskyn taulukko.

Lasketaan ensin luonnollisten lukujen ja kultaisen leikkauksen tulojen likiarvot lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä. Merkitään luvun x pyöristystä $[x]$–merkinnällä.

Taulukko 7. Luonnollisten lukujen ja kultaisen leikkauksen tulojen likiarvot lähimpään kokonaislukuun pyöristettynä.

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$[n \cdot \Phi]$	2	3	5	6	8	10	11	13	15	16	18	19

Stolarskyn taulukon ensimmäisen rivin (rivi 0) täyttäminen aloitetaan luvuilla 1 ja $[1 \cdot \Phi]$ joka on 2, näiden jälkeen tulevat luvut saadaan laskemalla kaksi edellistä lukua yhteen. Ensimmäinen rivi koostuu siis tässäkin Fibonaccin luvuista.

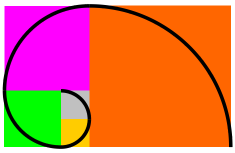
Toisen rivin aloittaa pienin ylemmältä riviltä puuttuva luku, eli 4. Seuraava luku on $[4 \cdot \Phi]$ eli 6. Tämän rivin seuraavat luvut saadaan taas laskemalla kaksi edeltävää yhteen. Kolmannen rivin aloittaa pienin ylemmiltä riviltä puuttuva luku 7, jonka jälkeen tuleva saadaan $[7 \cdot \Phi]$ eli 11 ja seuraavat luvut ja rivit saadaan yllä esitetyn periaatteen mukaisesti.

Taulukko 8. Stolarskyn taulukon ensimmäisiä lukuja.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233
2	4	6	10	16	26	42	68	110	178	288	466	754
3	7	11	18	29	47	76	123	199	322	521	843	1364
4	9	15	24	39	63	102	165	267	432	699	1131	1830
5	12	19	31	50	81	131	212	343	555	898	1453	2351
6	14	23	37	60	97	157	254	411	665	1076	1741	2817
7	17	28	45	73	118	191	309	500	809	1309	2118	3427
8	20	32	52	84	136	220	356	576	932	1508	2440	3948
9	22	36	58	94	152	246	398	644	1042	1686	2728	4414

Stolarskyn taulukon toisen rivin luvut ovat Fibonaccin lukuja kerrottuna kahdella, kolmas rivi puolestaan koostuu Lucasin luvuista. Millä muilla riveillä on Fibonaccin lukujen monikertoja? Löytyykö Lucasin lukujen monikertoja? Vastaukset kysymyksiin eDimensiossa.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■



Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 6

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

OSA 6. Fibonaccin lukujen käyttäminen laskutoimituksissa

Tässä osassa keskitytään Fibonaccin lukujen hyödyntämiseen erilaisissa laskutoimituksissa ja lukuesityksissä. Aloitetaan kuitenkin hieman kauempaa historiasta, sillä jo muinaiset egyptiläiset…

Egyptiläinen menetelmä kertolaskun laskemiseen

Egyptiläisillä oli käytössään menetelmä kertolaskun laskemiseen, jossa tarvittiin vain puolituksia, kaksinkertaistamista ja yhteenlaskua. Menetelmän jokaisessa vaiheessa kerrottava kaksinkertaistetaan ja kertoja jaetaan kahdella, kunnes puolituksissa päästään lukuun yksi. Puolitukset pyöristetään aina alaspäin. Lopuksi lasketaan sellaiset kerrottavat tai sen tuplaukset yhteen, joissa kertoja tai sen puolitus on pariton. Tämä on helpoin tehdä taulukon avulla, jossa esimerkiksi vasen sarake on kertojalle ja sen puolituksille, seuraava sarake on kerrottavan tuplauksille ja kolmanteen sarakkeeseen merkitään, mitkä toisen sarakkeen riveistä lasketaan mukaan (eli ne rivit, joissa ensimmäisen sarakkeen luvut ovat parittomia).

Esimerkiksi 27·63.

1. sarake: kertoja puolitetaan	2. sarake: kerrottava tuplataan	3.sarake: mitkä 2.-sarakkeen riveistä lasketaan mukaan
27	63	+
13	126	+
6	252	
3	504	+
1	1008	+

Nyt lasketaan yhteen 63 + 126 + 504 + 1008 = 1701, eli 27·63 = 1701.

Egyptiläisten menetelmä voidaan todistaa binäärijärjestelmän avulla. Koska 27 = 16 + 8 + 2 + 1, eli $27 = 11011_2$, niin 27·63 voidaan myös laskea $2^4 \cdot 63 + 2^3 \cdot 63 + 2^1 \cdot 63 + 2^0 \cdot 63$.

Kertolasku Fibonaccin lukujen avulla

Vastaavantyyppinen menetelmä onnistuu myös Fibonaccin lukujen avulla. Nyt vasen sarake alkaa ykkösellä ja toinen sarake alkaa kerrottavalla. Seuraavalla rivillä em. luvut tuplataan (eli lasketaan yhteen itsensä kanssa) ja siitä eteenpäin seuraavat luvut saadaan laskemalla pystysarakkeen kaksi yläpuolista lukua yhteen. Tätä jatketaan kunnes vasempaan sarakkeeseen tulisi kertojaa suurempi luku seuraavalle riville. Vasen sarake koostuu siten Fibonaccin luvuista, joista valitaan sellaiset, että ne yhteenlaskemalla saadaan kertoja. Lasketaan sitten niiden rivien toisten sarakkeiden luvut yhteen ja tästä saadaan kertolaskun tulos.

Esimerkki. 27·63 $(27 = 21 + 5 + 1 = 1001001_{\text{fib}})$.

1. Fibonaccin lukuja	2. yhteenlasku kerrottavalla	3. mitkä toisen sarakkeen luvut lasketaan yhteen
1	63	+
2	126	
3	189	
5	315	+
8	504	
13	819	
21	1323	+

Lasketaan yhteen 63 + 315 + 1323 = 1701. Tämän menetelmän etuna Egyptiläiseen nähden voidaan pitää sitä, että nyt tarvitaan vain yhteenlaskua.

Likimääräinen menetelmä mailien ja kilometrien muuntamiseen

Koska 1 maili on n. 1,609 km ja kultainen leikkaus Φ on n. 1,618, voidaan esittää likimääräinen muunnosmenetelmä kilometrien ja mailien muuntamiselle. Jos halutaan muuntaa matka kilometreistä maileiksi, voidaan tarkastella peräkkäisiä Fibonaccin lukuja, sillä niiden suhde on aina lähellä kultaista leikkausta ja siten myös lähellä mailien ja kilometrien suhdetta.

Esimerkiksi 21 kilometriä on noin 13 mailia (peräkkäiset Fibonaccin luvut). Vastaavasti maratonmatka 42 kilometriä on muutettavissa likimääräisesti maileiksi hakemalla sellaiset Fibonaccin luvut, että niiden summaksi tulee 42 ja sitten lasketaan yhteen niitä edeltävät Fibonaccin luvut, jolloin saadaan likimääräinen muunnos tehtyä aika helposti. Koska 42 = 34 + 8 (= 10010000_{fib}), ja niitä edeltävät Fibonaccin luvut ovat 21 ja 5, eli 42 km on noin 26 mailia (21 + 5). Tarkemmin 42 km on 26,1 mailia, eli saamme tällä menetelmällä aika tarkkoja likiarvoja.

Muunnos toimii luonnollisesti myös toiseen suuntaan. Jos esimerkiksi muunnetaan 55 mailia kilometreiksi, katsotaan Fibonaccin luvun 55 seuraaja, eli 89 (virhe 0,505 km, eli 0,6 %). Jos muunnettava mailimäärä on vaikka 100, sen Fibonaccin lukujen mukaisen summaesityksen (100 = 89 + 8 + 3 = 1000010100_{fib}) seuraajat yhteenlaskemalla saadaan tulos 144 + 13 + 5 = 162. Muunnosvirhe on jälleen alle prosentin. Tämä on siis kohtuullisen tarkka muunnostapa ja varsin nopea, mikäli mukana ei ole laskinta.

Vastaava menetelmä toimii esimerkiksi elektronivolttien muuntamisessa jouleiksi (1 eV = $1{,}602\cdot10^{-19}$ J), tosin virhe hieman kasvaa ja suuruusluokka eli kymmenen potenssi täytyy myös ottaa huomioon. Esimerkiksi muunnettaessa 20 MeV jouleiksi, tämä saadaan laskettua Fibonaccin lukujen avulla (20 = 13 + 5 + 2, haetaan seuraavat Fibonaccin luvut ja lasketaan ne yhteen 20 + 8 + 3 = 31 sekä huomioidaan eksponentit: mega=10^6, $10^6\cdot10^{-19} = 10^{-13}$) 20 MeV=$31\cdot10^{-13}$ J = $3{,}1\cdot 10^{-12}$ J, tarkemman arvon ollessa $3{,}2\cdot 10^{-12}$ J.

Myös kuutiotuumien ja kuutiosenttimetrien muuntamisessa voitaisiin käyttää Fibonaccin lukuja, mutta menetelmä kaipaa tällöin pientä hienosäätöä. Jätän tämän ongelman lukijoille pohdittavaksi.

Murtolukujen desimaaliesityksiä fibonaccin luvuilla

Murtoluvun 1/89 desimaaliesitys (≈ 0,01123595505617977528089887640 45) alkaa mielenkiintoisella tavalla Fibonaccin jonon luvuilla 0, 1, 1, 2, 3 ja 5, mutta itse asiassa desimaaliesitys kokonaisuudessaan voidaan saada Fibonaccin lukujen avulla (Taulukko 1).

Ero viimeisissä desimaaleissa selittyy sillä, ettei laskussa ole mukana kaikki Fibonaccin luvut. Yhtäläisyys Fibonaccin lukuihin voidaan osoittaa seuraavalla tavalla.

Taulukko 1. Murtoluvun 1/89 desimaaliesitys.

0,01
0,001
0,0002
0,00003
0,000005
0,0000008
0,00000013
0,000000021
0,0000000034
0,00000000055
0,000000000089
0,0000000000144
+ 0,00000000000233
0,01123595505573

Jos merkitään

$$k(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{F}_n\cdot x^n = 1\cdot x^2+1\cdot x^3+2\cdot x^4+3\cdot x^5+5\cdot x^6+\ldots$$

missä F_n on n:s fibonaccin luku, eli F_1=0, F_2=1, F_2=1, F_3=2,…

Tällöin seuraavien yhtäläisyyksien mukaan

$$\begin{aligned} k(x) &= 1\cdot x^2+1\cdot x^3+2\cdot x^4+3\cdot x^5+5\cdot x^6+\ldots \\ xk(x) &= \qquad\quad 1\cdot x^3+1\cdot x^4+2\cdot x^5+3\cdot x^6+\ldots \\ x^2k(x) &= \qquad\qquad\qquad 1\cdot x^4+1\cdot x^5+2\cdot x^6+\ldots \end{aligned}$$

saadaan $k(x)-xk(x)-x^2k(x)=x^2 \quad\Leftrightarrow$ $k(x)\,(1-x-x^2)=x^2$.

Jos $-x^2-x+1\neq 0$, eli $x\neq-\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$ (siis x ei saa olla –Φ tai –φ), saadaan tulos

$k(x)=\dfrac{x^2}{-x^2-x+1}$, mikä voidaan kirjoittaa myös

$$\frac{1}{x^{-2}-x^{-1}-1}=\sum_{n=1}^{\infty}F_n\cdot x^n \tag{1}$$

Jos yhtälöön (1) sijoitetaan muuttujan x arvoksi 1/10, saamme yhtälön

$$\frac{1}{89}=\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{F}_n\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^n .$$

Miten saadaan esitettyä edellä olevan perusteella luku 1/9899 desimaaliesityksenä? Ratkaisun näet tämän artikkelisarjan lopussa.

Laskutemppu

Seuraavan periaatteen mukaisesti voi hämmästyttää oppilaita. Kymmenen peräkkäisen yleisen Fibonaccin lukujonon lukujen summa on aina yhtä suuri kuin jonon seitsemäs arvo kerrottuna luvulla 11. Tempussa oppilas valitsee kaksi mielivaltaista (esimerkiksi kaksi- tai kolminumeroista) lukua. Oppilas kirjoittaa luvut taululle allekkain ja opettaja katsoo koko ajan toisaalle. Oppilaalle annetaan tehtäväksi laskea nämä kaksi lukua yhteen ja kirjoittaa tulos lukujen alle. Seuraavaksi oppilas laskee seuraavan luvun laskemalla kaksi viimeisintä lukua yhteen. Tätä toistetaan, kunnes taululla on kymmenen lukua. Seitsemännen luvun jälkeen opettaja kääntyy taululle sanoen esimerkiksi: ”Monenteenko lukuun olet päässyt?” ja kääntyy takaisin katsomaan muualle. Opettaja kertoo päässään seitsemännen luvun luvulla 11 ja kirjoittaa tuloksen paperille. Kun kaikki kymmenen lukua on laskettu ja kirjoitettu taululle, oppilaalle annetaan tehtäväksi laskea nämä kaikki luvut yhteen ja annetaan tarvittaessa lupa käyttää laskinta. Tässä vaiheessa opettaja myös sanoo oppilaille vastauksen löytyvän paperistaan.

Kun luvulla 11 kerrotaan esimerkiksi viisinumeroinen luku

$abcde = a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$,
saadaan tulos $11 \cdot abcde = a \cdot 10^5 + (a + b) \cdot 10^4 + (b + c) \cdot 10^3 + (c + d) \cdot 10^2 + (d + e) \cdot 10^1 + e \cdot 10^0$.

Esimerkki: Oppilas kirjoittaa lukujonoksi

87, 91, 178, 269, 447, 716, 1163, 1879, 3042, 4921.

Seitsemäs luku 1163 kerrotaan 11:lla, josta saadaan päässälaskun avulla 12 793 (ykkösten numero säilyy, eli on 3, kymmenien numero on 6 + 3 = 9, satojen numeroksi saadaan 1 + 6 = 7, tuhansien numeroksi saamme 1 + 1 = 2 ja viimeinen eli kymmenien tuhansien numero on 1

eli $11 \cdot 1163 = 1\overbrace{2}^{1+1}\underbrace{7}_{1+6}\overbrace{9}^{6+3}3$).

Todennäköisesti oppilas laskee summaa laskimella kohtuullisen pitkään ja tuloksen paljastuttua opettaja näyttää lapultaan löytyvää lukua. Luokka jää ihmettelemään, miten opettaja tiesi lukujen summan etukäteen.

Päässälasku voi myös olla työläs, mikäli yhteenlaskuista tulee paljon muistinumeroita ja luvut ovat isoja, joten luvulla 11 kertomista kannattaa harjoitella. Menetelmän todistaminen jää lukijoille harjoitustehtäväksi.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■

Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 7

KARI MIKKOLA, FM, OSAO, Kaukovainion yksikkö, tekniikka

OSA 7. Katsaus nykypäivään

Fibonaccin luvut ja kultaisen leikkauksen suhde ovat tarjonneet mielenkiintoisia yhteyksiä kaikkiin lukuihin, laskemiseen ja peleihin. Lukujen yhtäläisyydet luontoon ja toisiinsa voivat tuoda esiin yllättäviltä tuntuvia yhteyksiä. Katsotaan artikkelisarjan lopuksi yleisten Fibonaccin jonojen välisiä yhteyksiä, esitetään vielä yksi Fibonaccin matemaattinen tulos ja pienimuotoinen katsaus viimeisimpiin kehityssuuntiin.

Yleinen fibonaccin jono

Määritellään yleinen fibonaccin jono $G(a,b)_n$ seuraavasti:

$G(a,b)_n = G(a,b)_{n-1} + G(a,b)_{n-2}$, missä $G(a,b)_1 = a$ ja $G(a,b)_2 = b$.

Tarkastellaan seuraavaksi yleisen fibonaccin jonon lukuja:

$G(a,b)_1 = a$,
$G(a,b)_2 = b$,
$G(a,b)_3 = a + b$,
$G(a,b)_4 = a + 2b$,
$G(a,b)_5 = 2a + 3b$,
$G(a,b)_6 = 3a + 5b$,
$G(a,b)_7 = 5a + 8b$ jne.

Nyt a:n ja b:n kertoimet ovat Fibonaccin lukuja, joten yleisen fibonaccin jonon n:s termi voidaan esittää a:n, b:n ja Fibonaccin lukujen avulla seuraavasti:

$G(a,b)_n = a\cdot F_{n-1} + b\cdot F_n$ (1)

Esimerkiksi jono $G(7,2)_n$ (7, 2, 9, 11, 20, 31, 51, 82, …) voidaan esittää muodossa

$G(7,2)_n = 7\cdot F_{n-1} + 2\cdot F_n$.

Toisaalta tälle jonolle on olemassa lukuisia muitakin esitystapoja, esimerkiksi

$G(7,2)_n = 6\cdot F_{n-1} + F_{n+2}$.

Kertauksen vuoksi käydään vielä läpi merkintä

$$F_n = \frac{\Phi^n - (-\varphi)^n}{\sqrt{5}}, \text{ missä } \Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ ja } \varphi = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Fibonaccin lukujono yleisen G(a, b)-jonon mukaan esitettynä

Kaavan (1) mukaan voidaan kirjoittaa

$G(a,b)_{n+1} = a\cdot F_n + b\cdot F_{n+1} = a\cdot F_n + b\cdot (F_{n-1} + F_n)$
$= b\cdot F_{n-1} + (a + b)\cdot F_n$.

Näin ollen saamme yhtäsuuruuden

$a \cdot G(a,b)_{n+1} - b\cdot G(a,b)_n =$
$a\cdot (b\cdot F_{n-1} + (a + b)\cdot F_n) - b\cdot (a\cdot F_{n-1} + b\cdot F_n)$.

$\Leftrightarrow a \cdot G(a,b)_{n+1} - b\cdot G(a,b)_n =$
$a\cdot b\cdot F_{n-1} + a \cdot (a + b)\cdot F_n - a\cdot b\cdot F_{n-1} - b^2\cdot F_n$

$\Leftrightarrow a \cdot G(a,b)_{n+1} - b\cdot G(a,b)_n = (a^2 + ab - b^2)\, F_n$.

Tästä pääsisimme Fibonaccin lukujen esitykseen lukujonon $G(a,b)_n$ alkioiden avulla, mikäli voisimme olla varmoja, että seuraavan kaavan jakaja ei ole nolla:

$$F_n = \frac{a\cdot G(a,b)_{n+1} - b\cdot G(a,b)_n}{a^2 + ab - b^2}. \qquad (2)$$

Jos oletetaan, että $a^2 + ab - b^2 = 0$, saadaan

$$a = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4\cdot 1\cdot(-b^2)}}{2}$$
$$= \frac{-b \pm \sqrt{5}\cdot b}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}\cdot b.$$

Toisin sanoen yhtälö (2) ei ole voimassa, jos $a = \varphi \cdot b$ tai $a = -\Phi \cdot b$, eli a ja b eivät voi olla kultaisen leikkauksen suhteessa toisiinsa edellä esitetyllä tavalla, jotta yhtälö (2) pätee.

Yhtälö (2) on esitetty vuonna 2005 American Math Monthly -lehdessä artikkelissa "Fibonacci, Chebyshev and Orthoganal Polynomials" (D Aharonov, A Beardam, K Driver).

Reaaliluvuilla yhtälön (2) jakaja voi täten olla nolla, muttei kokonais- tai rationaaliluvuilla. Kokonaislukujen osalta voitaisiin päätyä tähän johtopäätökseen myös itsensä Fibonaccin tuloksen avulla.

Kongruumi

Fibonacci kutsui sellaisia lukuja kongruumeiksi, jotka ovat esitettävissä muodossa

$ab(b-a)(b+a)$, kun $(a+b)$ on parillinen tai muodossa $4ab(b-a)(b+a)$, kun $(a+b)$ on pariton.

Hän osoitti, että kongruumi on jaollinen luvulla 24 ja myös, ettei kongruumi voi olla neliö.

Oletetaan, että yhtälön (2) jakaja on nolla ja a tai b ovat erisuuruisia kuin nolla, jolloin saadaan

$$a^2 + ab - b^2 = 0 \Leftrightarrow ab = b^2 - a^2$$
$$\Leftrightarrow ab = (b-a)(b+a) \,||\cdot ab,$$

$$(ab)^2 = \underbrace{ab(b-a)(b+a)}_{=\text{kongruumi jos } (a+b) \text{ parillinen}} \qquad (3)$$

Yhtälön (3) vasen puoli on nyt neliö ja oikea puoli on kongruumi, jos $(a+b)$ on parillinen. Kongruumi ei voi olla neliö, joten yhtäsuuruus ei voi olla voimassa. Toisaalta jos $(a+b)$ on pariton, yhtälön (3) perusteella saadaan

$$(ab)^2 = ab(b-a)(b+a) \,||\cdot 4$$

$$\Leftrightarrow (2ab)^2 = \underbrace{4ab(b-a)(b+a)}_{=\text{kongruumi}}. \qquad (4)$$

Yhtälössa (4) kongruumi olisi neliö, mikä ei ole mahdollista, eli yhtälön yhtäsuuruus ei voi olla voimassa. Täten $a^2 + ab - b^2 \neq 0$ kaikilla kokonaisluvuilla a ja b, kun a tai b ovat erisuuruisia kuin nolla, joten yhtälö (2) pätee kokonaislukujen joukossa.

Yleinen jono G(c,d) esitettynä toisen yleisen jonon G(a,b) avulla

Oletetaan, että a, b, c ja d ovat kokonaislukuja. Fibonaccin jonon n:s termi voidaan yhtälön (2) mukaan kirjoittaa jonon $G(a,b)_n$ avulla ja yhtälön (1) mukaan $G(c,d)_n$ voidaan kirjoittaa Fibonaccin jonon avulla. Näistä saadaan seuraava tulos (Yhtälö (5)):

$$G(c,d)_n = cF_{n-1} + dF_n \overset{(2)}{=}$$
$$c \cdot \frac{a \cdot G(a,b)_n - b \cdot G(a,b)_{n-1}}{a^2+ab-b^2} + d \cdot \frac{a \cdot G(a,b)_{n+1} - b \cdot G(a,b)_n}{a^2+ab-b^2} =$$
$$\frac{ac \cdot G(a,b)_n - bc \cdot G(a,b)_{n-1} + ad \cdot G(a,b)_{n+1} - bd \cdot G(a,b)_n}{a^2+ab-b^2} =$$
$$\frac{-bc \cdot G(a,b)_{n-1} + (ac-bd)G(a,b)_n + ad \cdot \overbrace{G(a,b)_{n+1}}^{=G(a,b)_{n-1}+G(a,b)_n}}{a^2+ab-b^2}$$
$$\Leftrightarrow$$
$$G(c,d)_n = \frac{(ad-bc)\cdot G(a,b)_{n-1} + (ac+ad-bd)\cdot G(a,b)_n}{a^2+ab-b^2}.$$

Yhtälön (5) mukaan mitkä tahansa kaksi luonnollisilla luvuilla alkavat yleiset Fibonaccin lukujonot voidaan esittää toistensa avulla. Jos esimerkiksi a ja b ovat alkulukuja, c on yksi ja d on parillinen luku, näiden lukujen välille saadaan yhtälön (5) mukaan yhteys, jolloin parillinen luku d on esitettävissä kahden alkuluvun avulla.

Esimerkki $a = 17$, $b = 19$, $c = 1$ ja $d = 36$. Tällöin yhtälön (5) mukaan saadaan

$$G(c,d)_2 = 36 =$$

$$\frac{(17\cdot 36 - 19\cdot 1)\cdot 17 + (17\cdot 1 + 17\cdot 36 - 19\cdot 36)\cdot 17}{17^2 + 17\cdot 19 - 19^2}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$36 = \frac{593\cdot 17 - 55\cdot 19}{251}.$$

Esimerkin perusteella huomataan, ettei yhtälön (5) avulla saada (ainakaan suoraan) todistettua Goldbachin konjektuuria, mutta joka tapauksessa mikä tahansa luku voidaan ilmaista minkä tahansa kahden luvun (vaikkapa alkuluvun) avulla. Myös mikä tahansa Fibonaccin tapaan määritelty lukujono voidaan saada tehtyä millä tahansa toisella yleisellä Fibonaccin lukujonolla.

Yleinen kultainen leikkaus

Jos tarkastellaan ns. yleistettyjä kultaisia leikkauksia eli yhtälön $x^{p+1} = x^p + 1$ ratkaisuja, saadaan p:n eri arvoilla seuraava taulukko.

Taulukko 1. Yleistettyjä kultaisia leikkauksia.

p	Φ_p (pyöristetty)
0	2
1	1,618
2	1,465
3	1,380
4	1,324

Geometrisesti yleinen kultainen leikkaus Φ_p on selitettävissä janan AB jakamisesta pisteellä C kahteen osaan siten, että osien suhde noudattaa seuraavaa yhtälöä

$$\frac{CB}{AC} = \left(\frac{AB}{CB}\right)^p.$$

Harmoninen matematiikka

Professori Alexey Stakhov on esittänyt vuonna 1996 luennollaan *7th International Conference on Fibonacci Numbers and Their Applications* -konferenssissa käsitteen harmoninen matematiikka. Tämä matematiikan osa-alue perustuu kultaisen leikkauksen ja niiden edellä esitettyjen yleistyksien suhteisiin sekä hyperbolisiin Fibonaccin ja Lucasin-funktioihin.

Esimerkiksi luvut määritellään yleistettyjen kultaisten leikkausten avulla. Lisää tietoa aiheesta on löydettävissä Internetistä esimerkiksi hakusanoilla harmony mathematics.

Fibonacci Quarterly

Fibonaccin luvuista ja niihin liittyvästä matematiikasta kiinnostuneille on olemassa oma lehtensä: Fibonacci Quarterly. Lehden perusti vuonna 1963 kaksi Fibonacci Association -yhdistyksen perustajajäsentä Verner Emil Hoggatt. Jr (1921–1981) ja Brother Alfred Brousseau, F.S.C (1907–1988).

Lehti ilmestyy edelleen säännöllisesti tarjoten lukijoilleen viimeisintä tietoa lukuteorian ja Fibonaccin lukujen saralta.

Tietoa Dimensio-lehdestä

Fibonaccin kanien lisääntymiseen liittyvän esimerkin muodostamasta lukujonosta on ollut innoittajaksi matemaatikoille jo yli 800 vuoden ajan. Kultaisen leikkauksen suhteella voidaan myös saada monenlaista mielenkiintoista aikaiseksi. Aiemmissa Dimension numeroissa on ollut kultaiseen leikkaukseen ja Fibonaccin lukuihin liittyviä artikkeleja.

Benfordin lain ja Fibonaccin lukujen välisestä suhteesta on tietoa Hannu Korhosen artikkelissa ”Benfordin laki” Dimension numerosta 5/2006. Mikäli lukijoita kiinnostaa lukea taiteen ja luonnon suhteesta Fibonaccin lukuihin tai kultaisen leikkauksen suhteeseen, niin Dimensiosta 6/2006 on luettavissa Korhosen artikkeli ”Mona Lisa ja Fibonacci”. Jos Fibonaccin lukujen suhde kombinatoriikkaan ja äärettömiin sanoihin kiinnostaa, niin numerossa 3/2005 on artikkeli ”Fibonaccin ääretön sana” kirjoittajina Juhani Karhumäki ja Arto Lepistö.

Artikkelisarjaan liittyviä tehtäviä löytyy osoitteesta http://kotisivu.suomi.net/mikkola.kari/fibonacci ■

Lähteet:
W. W. R. Ball, A Short Account of the History of Mathematics
E. T. Bell, Development of Mathematics
C. B. Boyer, Tieteiden Kuningatar
M. Gardner, Penrose Tiles to Trapdoor Ciphers, osoitteesta http://www.cut-the-knot.org/pythagoras/withoff.shtml
A. F. Horadam, Eight hundred years young, The Australian Mathematics Teacher 31 (1975) 123-134, osoitteesta http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/fibo.html
O. Kurola, Kuka Kukin Oli Matematiikan Historiassa
E. Lucas, Récréations mathématiques, osoitteesta http://visualiseur.bnf.fr/CadresFenetre?O=NUMM-3943&M=tdm
http://www.goldenmuseum.com/
http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/fib.html
http://faculty.evansville.edu/ck6/bstud/index.html
http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/BiogIndex.html
http://www.cs.wm.edu/~pkstoc/toh.html

Ratkaisut resistanssiongelmiin (Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 2)

Kokonaisresistanssin arvoissa esiintyy peräkkäiset Fibonaccin luvut. Jos kytkentöjä jatketaan annetun mallin mukaisesti, millainen kokonaisresistanssi on kytkennällä 8? Tai 9? Mikä kokonaisresistanssi tulee kytkennälle n? Mitä lukuarvoa parillisten kytkentöjen kokonaisresistanssi lähestyy, jos kytkentää kasvatetaan? Miten käy parittomien kytkentöjen kokonaisresistanssille kytkennän kasvaessa?

$$R_8 = \frac{34}{21},\ R_9 = \frac{34}{55},\ R_n = F_{n+1}^{(-1)^n} \cdot F_n^{(-1)^{n+1}},\ \lim_{n\to\infty} R_{2n} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \Phi \text{ ja } \lim_{n\to\infty} R_{2n+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} = \varphi\ .$$

Ratkaisu joenylitystehtävään (Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 3)

Lucas antoi kirjassaan seuraavan ratkaisun. Merkinnät on tehty Lucasin ratkaisun mukaan.

Aluksi kolme pariskuntaa on joen toisella puolella. Miehiä kuvataan isoilla kirjaimilla ja naisia pienillä.

C B A	. . .
c b a	. . .

Kaksi naista menee joen yli:

C B A	. . .
c . .	. b a

Toinen naisista palaa takaisin ja ottaa jäljelle jääneen naisen mukaansa joen oikealle puolelle.

C B A	. . .
. . .	c b a

Yksi naisista palaa takaisin ja jää miehensä kanssa rannalle, kun kaksi muuta miestä menevät joen yli.

C . .	. B A
c . .	. b a

Toinen joen yli menneistä pariskunnista palaa takaisin ja miehet soutavat joen yli oikealle puolelle.

. . .	C B A
c b .	. . a

Joen oikealla puolella oleva nainen palaa veneellä joen yli ja ottaa toisen naisista mukaansa.

. . .	C B A
c . .	. b a

Yksinään olevan naisen puoliso (vaihtoehtoisesti toinen joen oikealla puolella olevista naisista) palaa takaisin, ja he ylittävät joen vasemmalle puolelle jääneen naisen kanssa.

. . .	C B A
. . .	c b a

Joenylityksiä veneellä tulee 11, joka on kuudes (tehtävän henkilöiden määrä oli kuusi) luku Lucasin jonossa, jos aloitetaan luvuilla 2 ja 1. Lucas antaa kirjassaan myös toisen mustasukkaisten miesten esimerkin. Tässä tapauksessa neljä pariskuntaa on ylittämässä jokea veneellä, johon mahtuu kolme ihmistä. Ratkaisu jääköön lukijoiden pohdittavaksi.

Ratkaisu tehtävään ”Löytyykö Fibonaccin tai Lucasin lukujen monikertoja” (Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 5)

Fibonaccin lukujen monikertoja löytyy esimerkiksi riveiltä 4, 8, 10, 19.

Lucasin lukujen monikertoja on esimerkiksi rivillä 9.

Ratkaisu tehtävään ”Miten saadaan esitettyä edellä olevan perusteella luku 1/9899 desimaaliesityksenä?” (Kurkistuksia Fibonaccin lukujen maailmaan: Osa 6)

$$\frac{1}{9899} = \frac{1}{10000-100-1} = \frac{1}{\left(\frac{1}{100}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{100}\right)^{-1} - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} F_n \cdot \left(\frac{1}{100}\right)^n$$

$$= 0{,}000101020305081321\ldots$$