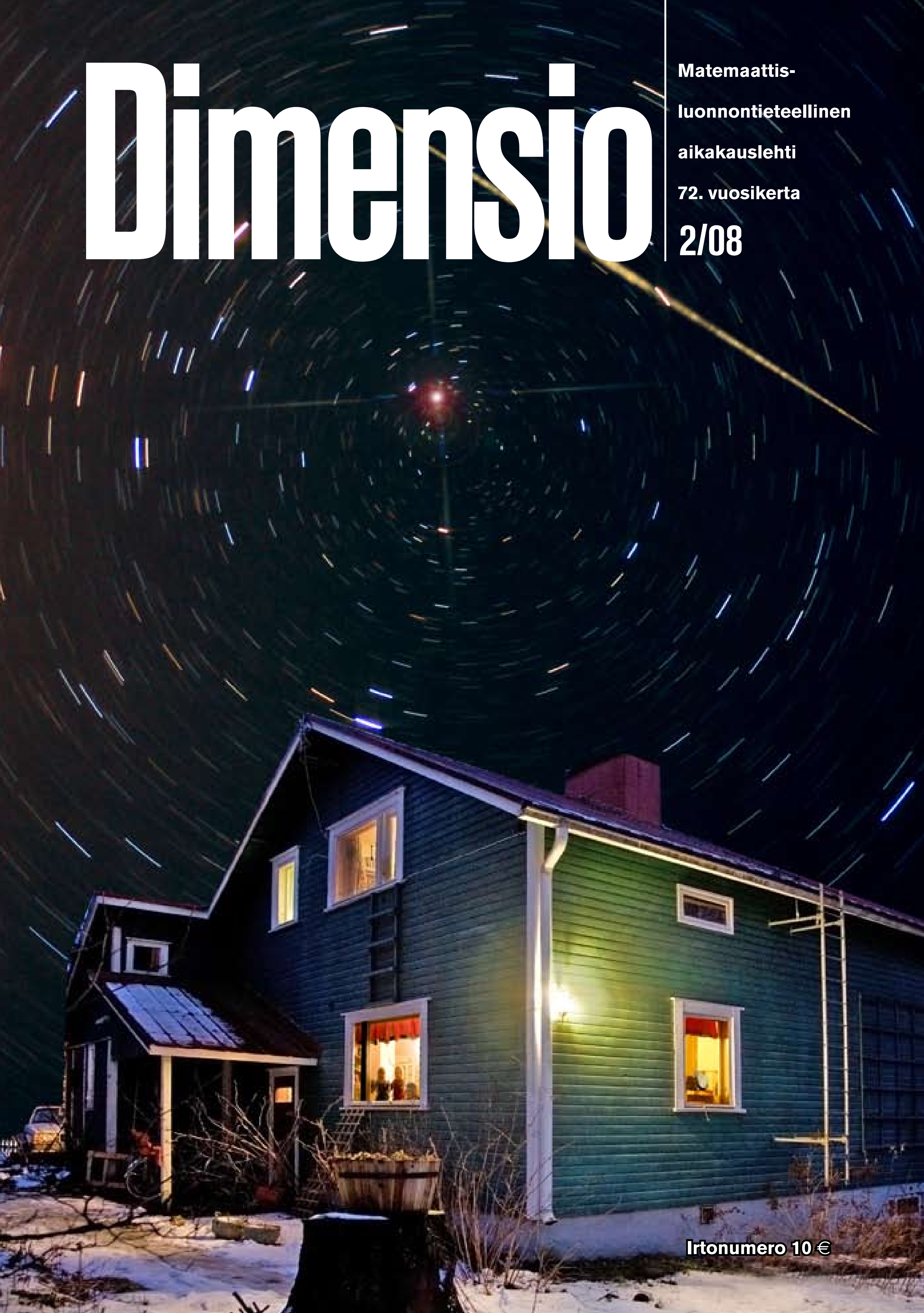
Dimensio

Matemaattis-
luonnontieteellinen
aikakauslehti
72. vuosikerta
2/08



Irtonumero 10 €

Dimensio

Matemaattis-
luonnontieteellinen
aikakauslehti

72. vuosikerta

2/2008

Kansikuva: Timo Suvanto. Pitkällä valotusajalla otettuun kuvaan on osunut tähdenlento. Kuinka kirkas se on? Enemmän sivulla 31.

JULKAISIJA:
Matemaattisten Aineiden
Opettajien Liitto MAOL ry
Rautatieläisenkatu 6, 00520 Helsinki

PÄÄTOIMITTAJA
Leena Mannila
Puh. 050 367 3421

VASTAAVA PÄÄTOIMITTAJA
Irma Iho
Puh. 050 302 1589

TOIMITUSSIHTEERI:
Jarkko Narvanne
Puh. 050 523 2768
dimensio@maol.fi

PAINO:
Forssan Kirjapaino Oy
ISSN 0782-6648
ISO 9002

TILAUKSET JA
OSOITTEENMUUTOKSET:
MAOL:n toimisto
Puh. (09) 150 2338

TILAUSHINTA:
Vuosikerta 45 €, irtonumero 10 €,
ilmestyy 6 numeroa vuodessa

Pääkirjoitus

IRMA IHO, Hallituksen puheenjohtaja

Ylioppilastutkinnon rakenne vakiintunut

Isot rakenteelliset muutokset ylioppilastutkinnossa ovat vakiintuneet. Kokemuksia on jo sekä ruotsin kielen valinnaisuudesta että yksittäisten reaaliaineiden kokeista terveystietoa myöten. Toista kotimaista kieltä kirjoitettiin valinnaisena ensimmäistä kertaa keväällä 2005 ja reaaliaineita terveystietoa lukuun ottamatta keväällä 2006. Kysymyksiä on herättänyt myös ylioppilastutkinnon rakenteellisten muutosten vaikutus matematiikan kokeen suorittamiseen.

Pitkän matematiikan kokeeseen osallistuvien määrä on pysytellyt pitkään vakiona, noin 12 000:ssa. Odotettua lisäystä ei tullut ruotsin valinnaisuuden myötä eikä LUMA – tavoitetta ole saavutettu. Lyhyttä matematiikkaa kirjoitetaan entistä enemmän syksyllä ja kevään kokeeseen osallistujien määrä onkin laskenut roimasti tänä keväänä. Onneksi kokonaan matematiikan kokeeseen osallistumattomien määrä ei ole kovin suuri. Voisihan se pienempikin olla, koska on kysymyksessä perustaito.

Suurin muutos on tapahtunut fysiikassa ja kemiassa. Positiivista on se, että suuri osa viimeisille kursseille osallistuneista osallistuu ylioppilaskokeeseen. Pelko, että vain parhaimmat osallistuisivat, oli turha. Huonona uutisena on se, että liian vähän opiskelijoita osallistuu viimeisille kursseille.

Tämän kevään kokeeseen ilmoittautui 5 066 fyysikkoa ja 4 123 kemistiä. Fysiikan osuus on 12 % ja kemian 10 % reaaliaineiden kokeisiin ilmoittautuneiden määrästä. Nämä prosenttiosuudet näyttävät kauniilta ja ovat samaa luokkaa kuin historian, terveystiedon ja yhteiskuntaopin. Tulokset muuttuvat rumemmiksi, kun otetaan huomioon se, että reaaliaineiden kokeisiin osallistutaan syksyisin runsaasti. Tämä ei koske fysiikkaa lainkaan, sillä harva koulu järjestää kurssitarjottimen niin, että kirjoittaminen olisi edes mahdollista. Kemiaankin osallistutaan varsin vähän. Esimerkiksi syksyllä 2007 osallistui fysiikan kokeeseen 629, kemian kokeeseen 1 440, maantieteeseen 2 860 ja historiaan 3 734 kokelasta. Korottajat on jo laskettu mukaan. Terveystiedon saldo on 8 073, kun syksy ja kevät lasketaan yhteen. Terveystiedon kokeeseen osallistuvien määrä herättänee monia kysymyksiä.

Sillä ei tietenkään ole suurta merkitystä, mikä on matemaattisten aineiden kirjoittajien määrän suhde muiden oppiaineiden kirjoittajien määrään. Sillä on merkitystä, että lukio tuottaa noin 12 000 pitkän matematiikan kirjoittanutta ja noin 5 000 fysiikan ja kemian kokeen läpäissyttä. Tästä määrästä pitää riittää kaikkien korkeakouluihin tarpeisiin. Helposti voi laskea kuinka onneton tilanne on, kun vielä muistaa, että pitkien oppimäärien suorittaneilla on oikeus aloittaa opinnot sellaisillakin aloilla, jotka eivät pitkiä oppimääriä vaadi. Ymmärtää hyvin ammattikorkeakoulujen valituksen, että huonoa ainesta hakeutuu opiskelijoiksi. Lukiossa hankittuja tietoja ja taitoja pitkässä matematiikassa, fysiikassa ja kemiassa ei ole ehkä ollenkaan tai taidot ovat hyvin heikot.

Matemaattisten aineiden hylkäämisprosentit ovat moneen muuhun oppiaineeseen verrattuna suuria, vaikka läpipääsyn pisterajat ovat painuneet kymmenen tienoille ja allekin. Osallistujien ja osaajien määrät eivät ole läheskään samat. Tämä on ison keskustelun paikka, kun lähdetään uudistamaan opetussuunnitelmia ja tuntijakoja. Ehkä ”Leikolan komiteaa” tarvittaisiin taas.

Matemaattisten aineiden opettajilla on iso urakka raivata tilaa omille oppiaineilleen lukion tiukan tuntijaon puitteissa. Monia tärkeitä oppiaineita on kilpailemassa opiskelijan aikaresurssista. Helppoihin ratkaisuihin ei opiskelijoita pitäisi kannustaa. Ylioppilastutkinnon jälkeenkin pitää selvitä.

Hyvää kevään odotusta kaikille!

PISA 2006 matematiikkatulokset – olemmeko me voittamattomia?

ERKKI PEHKONEN, Soveltavan kasvatustieteen laitos, Helsingin yliopisto
SIRKKU KUPIAINEN, Koulutuksen arviointikeskus, Helsingin yliopisto

Suomalaiset 9-luokkalaiset selviytyivät kolmannen kerran (2000, 2003, 2006) ”mitalisijoille” kansainvälisessä PISA-vertailussa. Tässä tarkastellaan matematiikan tehtäviä ja tuloksia viimeisessä PISA-testissä (2006). Itse PISA-vertailun toteutus on kuvailtu tarkemmin Jari Lavosen Dimensio-artikkelissa (1/2008), joten sitä ei enää toisteta.

Suomalaisten oppilaiden menestyminen vuoden 2000 PISA-vertailussa (ks. Välijärvi & Linnakylä 2002) oli hämmästyksen aihe useimmille suomalaisille etenkin matematiikan ja luonnontieteiden osalta. Menestyminen toisessa eli vuoden 2003 PISA-vertailussa (ks. Kupari & Välijärvi 2005), missä matematiikka oli pääosassa, herätti meidät kuitenkin uskomaan saavutukseen ja miettimään vakavasti menestyksen mahdollisia syitä. Kolmas PISA-tutkimus vuonna 2006 vahvisti edelleen asemamme (ks. Arinen & Karjalainen 2007) – suomalaisten suoritukset ovat selkeästi kansainvälisen PISA-vertailun kärjessä.

Sanomalehdissä on kirjoitettu Suomen hyvästä PISA-menestyksestä, jolloin kadunmiehelle on syntynyt kuva, että suomalaisilla on matematiikka hallussaan. Mutta matemaatikot ovat kuitenkin korostaneet, etteivät suomalaisten matematiikkataidot ole koulun jälkeen kovin kummalliset (esim. Astala & al. 2005); SOLMU-lehdessä on muitakin matemaatikoiden kirjoituksia. Selityksenä tälle ristiriitaiselta näyttävälle tilanteelle on se tosiasia, että matematiikkaa on ainakin kolmea eri lajia: Meillä on ”koulumatematiikka” eli se mitä koulussa opetetaan. Siitä poikkeaa oleellisesti ”korkeakoulumatematiikka”; siitä matemaatikot puhuvat. Nyt on saatu mukaan kolmas laji, ”PISA-matematiikka”, jota voisi myös sanoa matemaattisen perustiedon käyttötaidoksi. Siispä PISA-tulokset osoittavat, että suomalaiset nuoret osaavat käyttää matemaattista tietämystään (kansalaismatematiikkaa) paremmin kuin useimpien muiden maiden oppilaat. Mutta yhdessä matematiikan lajissa menestyminen ei kuitenkaan takaa hyviä suorituksia toisissa. Lukiossa ja korkeakouluissa tulevat esille matemaattisten käsitteiden hallinta ja käyttäminen, mikä on aivan eri asia kuin PISA-tehtävien vaatimat taidot.

Jokainen PISA-tutkimuksen osa-alue – lukeminen, matematiikka ja luonnontieteet – on nyt ollut kerran painopistealueena ja selvästi muita laajemman tarkastelun kohteena. Lienee siis aika lähteä selvittämään, mikä suomalaisessa opetuksessa voisi selittää nyt jo kolmatta kertaa todennetun suomalaisoppilaiden muita selvästi paremman ja tasaisemman matematiikan käyttötaidon tason. Siksi mm. suomalaisoppilaiden menestyksen ja osaamisprofiilin takana olevien tekijöiden selittäminen (vrt. Pehkonen & Seppälä 2007) on tärkeää myös meille, jotta voimme edelleen parantaa omaa opetustamme. Muut maat näyttävät jo hyväksyneen Suomen jatkuvan menestyksen; näitä kannanottoja voi lukea esimerkiksi ulkoministeriön nettisivuilta (Anon. 2008).

PISA-vertailu

PISA (Programme for International Student Assessment) pyrkii arvioimaan nuorten tietoja ja taitoja tulevaisuuden arjen elämän ja elinikäisen oppimisen vaatimusten näkökulmasta – siis sitä, miten hyvin peruskoulun päättövaiheessa olevat oppilaat hallitsevat “valistuneelta, harkitsevalta kansalaiselta ja kuluttajalta” vaadittavat taidot (OECD 2006, 72). PISA-vertailuissa arvioidaan 15-vuotiaiden osaamista kolmella pääalueella: lukeminen, matematiikka ja luonnontieteet. Tarkempi kuvaus PISA-vertailun toteutuksesta on mm. Lavosen (2008) Dimensio-artikkelissa, joten emme toista sitä tässä. Sen sijaan keskitymme suomalaisoppilaiden menestykseen vuoden 2006 matematiikan osa-alueen tehtävissä. Matematiikan PISA-testaus ja -tehtävät (*mathematical literacy*) perustuvat seuraavaan kahdeksaan matemaattiseen kompetenssiin: ajatteleminen ja päättely, perusteleminen, kommunikointi, mallintaminen, ongelman asettaminen ja ratkaiseminen, tiedon esittäminen, symbolien sekä muodollisen ja teknisen kielen ja operaatioiden käyttäminen, ja apuvälineiden käyttäminen (ks. OECD 2006, 97).

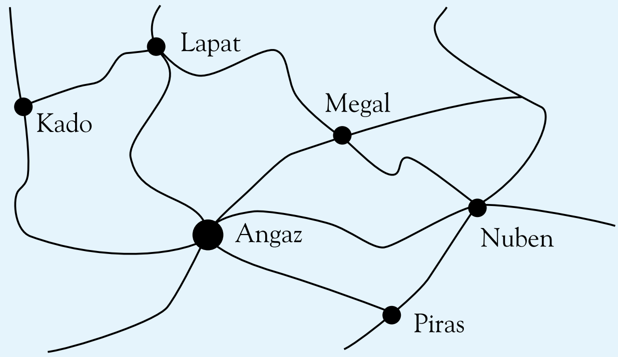
Suuri osa PISA-vertailussa käytetyistä tehtävistä voidaan luokitella *kompleksisiin ongelmiin* (ks. OECD 2006, 74–111). Ne ovat nonstandardeja (epätavanomaisia) siinä mielessä, ettei sellaisia ole useinkaan käsitelty matematiikan oppikirjoissa. Kompleksiset ongelmat ovat tehtäviä, joissa on annettu lähtötilanne, usein verbaalisena kuvauksena, ja joiden ratkaiseminen vaatii ainakin jonkin asteista mallinnusta. Komplekseja ongelmatehtäviä voidaan siis kuvailla seuraavilla sanoilla: 'verbaalinen', 'tilannepohjainen', 'mallinnusta vaativa', 'kompleksinen'.

PISAn taustafilosofiaa ja arvioinnin kohteena olevia kompetensseja kuvataan PISA 2006 -tutkimuksen teoreettisessa viitekehyksessä (OECD 2006), jossa asiaa konkretisoidaan matematiikan osalta 25 esimerkkitehtävän avulla (mt, 74–111). Nämä eivät kuitenkaan ole samoja, joita oppilaat ratkaisivat tällä kertaa, vaan ne edustavat aiempien vuosien esikokeissa tai varsinaisissa PISA-tutkimuksissa käytettyjä tehtäviä. Vuoden 2006 tehtävät on valittu vuoden 2003 tehtävien joukosta, mutta niitä ei ole julkistettu, jotta tehtäviä voidaan käyttää myös seuraavissa PISA-arvioinneissa. Näin eri arviointikertojen tulokset voidaan kytkeä toisiinsa mahdollisten trendien havaitsemiseksi.

Seuraavassa on esimerkkejä PISA-tehtävistä (OECD 2006, 77–78):

Esimerkki 1. Loma

Tässä tehtävässä on selvitettävä, mikä olisi paras reitti lomamatkaa varten. Kuvat A ja B näyttävät karttaa alueesta ja välimatkoja kaupunkien välillä.



Kuva A. Kartta kaupunkien välisistä teistä.

	Angaz	Kado	Lapat	Megal	Nuben	Piras
Angaz						
Kado	550					
Lapat	500	300				
Mergal	300	850	550			
Nuben	500		1300	450		
Piras	300	850	800	600	250	

Kuva B. Lyhyin välimatka kaupungista toiseen kilometreissä.

<u>Kysymys 1</u>: Loma
Laske lyhyin välimatka tietä pitkin kaupunkien Nuben ja Kado välillä.

<u>Kysymys 2</u>: Loma
Sanna asuu Angaz'issa. Hän haluaa käydä Kado'ssa ja Lapat'issa. Hän voi matkustaa *enintään 300 km* yhdessä päivässä, mutta voi keskeyttää matkansa missä tahansa kaupunkien välissä ja yöpyä teltassa. Sanna haluaa viipyä molemmissa kaupungeissa kaksi yötä, jotta voi kuluttaa yhden päivän katsellen kaupungin nähtävyyksiä. Esitä Sannan matkasuunnitelma täydentäen seuraavaan taulukkoon paikat, joissa hän yöpyy.

Päivä	Yöpyminen
1	Telttapaikka Angaz'in ja Kado'n välissä
2	
3	
4	
5	
6	
7	Angaz

Toinen esimerkkitehtävä, jossa tulee hyvin esiin PISA-tehtävien takana olevan filosofian ja tavanomaisen opettaja-ajattelun ero, olkoon seuraava (ks. OECD 2006, 102):

Esimerkki 2. Etäisyys

Maija asuu kahden kilometrin päässä koulusta ja Matti viiden kilometrin päässä. Kuinka kaukana Maija ja Matti asuvat toisistaan?

Kun tämä tehtävä esiteltiin opettajille, monet ehdottivat sen hylkäämistä, koska se on liian helppo; heti näkee, että vastaus on 3 km. Toinen ryhmä opettajia totesi sen sopivan huonosti testiosioksi, koska "siihen ei ole vastausta", ts. yhtä numeerista vastausta. Kolmas reaktio oli, ettei tehtävä ole hyvä, koska siihen on monta mahdollista vastausta; ilman lisätietoa ei voi sanoa muuta kuin että Maijan ja Matin kotien välimatka on jotain kolmen ja seitsemän kilometrin väliltä. Pieni ryhmä opettajia piti kuitenkin tehtävää erinomaisena, sillä oppilailla ei ole valmista strategiaa sen ratkaisemiseen ja heidän on näin käytettävä sen ratkaisemiseen aitoa matemaattista ajattelutaitoa.

Vuoden 2006 PISA-tehtävien joukossa oli yksi hyvin samanlainen (kuin esimerkki 2), joskin ehkä teoreettisempi ja selvemmin koulugeometriaa muistuttava tehtävä. Vain 9 % suomalaisoppilaista vastasi siihen oikein (pojista 11 %, tytöistä 8 %), ja kokonaan vastaamatta jättäneiden osuus oli poikkeuksellisen suuri (16 %). Kyseinen tehtävä oli toki vaikea myös muiden maiden oppilaille, Esimerkiksi Sloveniassa, jonka oppilaat edustivat tässä tehtävässä Euroopan huippua, tehtävän ratkaisi vain hieman yli viidennes oppilaista. Suomalaisoppilaat jäivät yhdessä ruotsalaisten kanssa mukana olleen 32 Euroopan maan joukossa sijalle 17. Myös kaikkien OECD-maiden keskiarvo oli Suomen keskiarvoa korkeampi (12 %). Vaativampaa matemaattista ajattelua edellyttävissä tehtävissä on Suomen koululaisilla siis vielä selkeästi parantamisen varaa.

Useassa maassa on ensimmäisten PISA-tutkimusten jälkeen ryhdytty liittämään tämäntyyppisiä tehtäviä osaksi koulumatematiikkaa. Tämä ei yleensä vaadi opetussuunnitelmien tarkistusta, vaan ainoastaan niiden periaatteiden ja tavoitteiden uudenlaista tulkintaa. Esimerkkinä mainittakoon Saksa, jossa on julkaistu jo pari vuotta sitten opettajille suunnattu kirja, jossa on runsaasti PISA-tyyppisiä ongelmanratkaisutehtäviä ja liitteenä CD-levy, jolla on lisää materiaalia (ks. Blum & al. 2006). Avoimeksi jää, kumpi selitys osuu kohdalleen: Onko kyse siitä, että matematiikan on huomattu jäävän oppilaille loppujen lopuksi vieraaksi ja heidän kykynsä soveltaa siinä opetettavia tietoja ja taitoja arkipäivän tilanteisiin heikoksi, vai siitä, että maat haluavat nostaa sijoitustaan tämän hetken merkittävimmässä kansainvälisessä vertailututkimuksessa? Todennäköisesti tällainen opetuksen kehittäminen palvelee kuitenkin molempia tavoitteita.

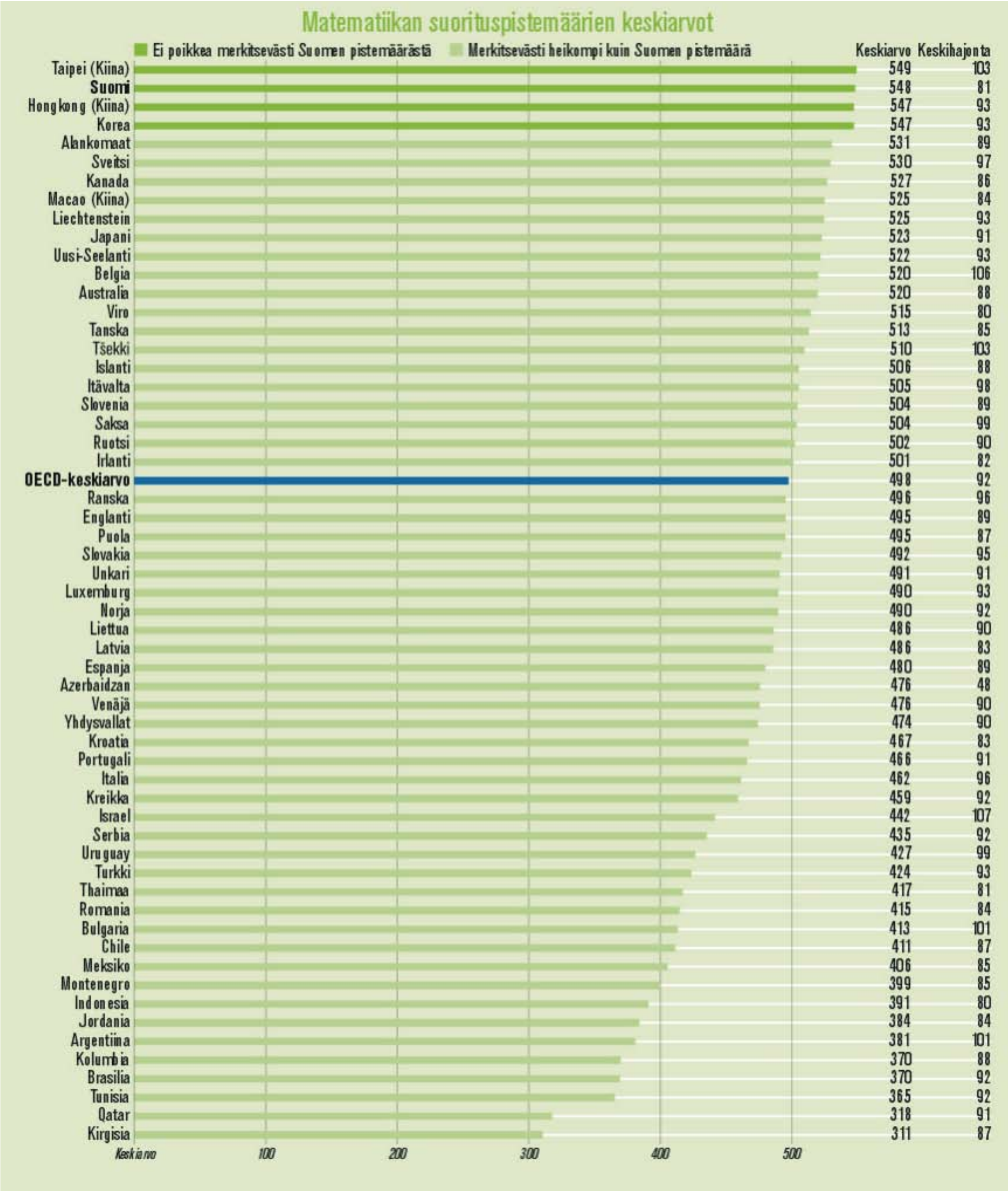
Suomalaisoppilaiden osaaminen

Kuten vertailututkimuksissa on tapana, esitämme aluksi kaikkien PISA-tutkimukseen osallistuneiden maiden tulokset matematiikan osa-alueella (taulukko 1). Tulokset on esitetty edellisten PISA-tutkimusten tapaan käyttäen asteikkoa, jossa OECD-maiden keskiarvoksi on määritelty 500 ja hajonnaksi 100. Suomalaiskoululaisten saavuttama pistemäärä on 548, kun OECD-keskiarvo on 498. Pieni ero keskiarvossa johtuu siitä, että vuoden 2006 tulokset on kalibroitu vastaamaan edellisen matematiikkaan painottuneen tutkimuskierroksen tuloksia. Suomi on siis edelleen jaetulla ykköspaikalla, sillä neljän parhaiten menestyneen maan välillä ei ole tilastollista eroa.

Taulukosta 1 voidaan myös nähdä, että Suomen koululaisten osaaminen on selkeästi edellä muiden Pohjoismaiden tuloksia. Tanska, Islanti ja Ruotsi sijoittuvat hieman OECD-maiden keskiarvon yläpuolelle ja Norja hieman sen alapuolelle. Selvästi muita parempaa osaamista ovat OECD-maiden joukossa osoittaneet Suomen lisäksi Korean, Alankomaiden, Sveitsin ja Kanadan koululaiset. Suomalaisoppilaiden osaamisen korkeaa tasoa osoittaa myös se, että mukana olleen 32 Euroopan valtion joukossa suomalaisoppilaat olivat parhaita 23 tehtävän kohdalla ja kuuluivat lisäksi viiden parhaan joukkoon 18 tehtävässä; so. yhteensä 85 % tehtävistä. Heikoin sijoitus oppilaillamme oli sijaluku 17 kahdessa tehtävässä.

Matematiikan tehtäviä oli kaikkiaan 48. Toteutuksessa eri osa-alueiden tehtävät oli kierrätetty ryväksinä 12 eri vihkoon, jotta mikään tehtäväkokonaisuus ei olisi kärsinyt kiireestä tai muista häiriötekijöistä muita enemmän. Vain osa oppilaista sai kuitenkin sellaisen tehtävävihkon, jossa oli matematiikan tehtäviä vain puolet tai neljännes koko tehtävämäärästä. PISA-tehtävät on luokiteltu niin vastaustyypin, matemaattisen sisällön kuin vaadittavan matemaattisen taidon mukaan. Kaiken kaikkiaan kuhunkin tehtävään vastasi noin 1400 oppilasta eli neljäsosa arviointiin osallistuneista. Kukin vastaus on arvioitu joko oikeaksi tai vääräksi, joskin osassa tehtäviä on myös annettu osittaiset pisteet

Taulukko 1. Matematiikan suorituspisteiden keskiarvot (Arinen & Karjalainen 2007, 32).



vastauksesta, joka on oikean suuntainen, mutta ei kaikin puolin täytä vaatimuksia. Näin oli muun muassa edellä (esimerkin 2 jälkeen) mainitussa geometrian tehtävässä.

Hieman alle puolet tehtävistä oli joko perinteisiä monivalintatehtäviä tai kolmen/neljän tehtävä-johdantoon liittyvän väitteen oikea/väärä –valintoja; jälkimmäiset osoittautuivat edellisiä hieman vaikeammaksi. Noin neljäsosassa tehtävistä kysyttiin pelkästään oikeaa vastausta (yleensä tämä oli suhteellisen yksinkertaisen laskutoimituksen tuloksena saatu luku tai valmiiseen kuvaajaan piirrettävä käyrä), kun taas neljäsosassa tehtäviä oppilasta pyydettiin myös osoittamaan, miten tulos on saavutettu. Näistä useimman kohdalla on suoritusten arvostelussa kuitenkin jälkikäteen päätetty joustaa, ja tehtävästä on saanut täydet pisteet, vaikka selitystä ei ole annettu. Menestys on siis harvoin ollut kiinni oppilaan kyvystä perustella vastaustaan matemaattisesti.

Sisällön suhteen tehtävät on luokiteltu sekä matemaattisen alansa mukaan: luvut, geometria, funktiot, todennäköisyys, tilastot, algebra ja "diskreetti matematiikka", että vuoden 2003 PISA-tutkimuksen tapaan hieman suurempiin kokonaisuuksiin jaoteltuna: "tila ja muoto", "muutos ja suhde", "määrä" sekä "epävarmuus". Valtaosa tehtävistä jakautuu varsin tasan lukujen, geometrian ja tilastojen kesken, eikä niiden joukossa ole kuin yksi suomalaisoppilaille usein ongelmalliseksi osoittautunut algebran tehtävä. Tämä olikin edellä mainitun geometrian tehtävän ohella ainoa, jossa suomalaisoppilaiden ratkaisuprosentti jäi alle 10 %.

Tehtävät on lisäksi luokiteltu tehtäväkontekstin mukaan henkilökohtaisen elämän alueelle, koulumaailmaan, julkiselle alueelle, tieteeseen sekä matematiikan sisäiseen maailmaan kuuluviin. Tehtäväkonteksti ei näytä olevan kovin merkitsevä tekijä lukuun ottamatta niitä tehtäviä, joiden arvioidaan olevan muita lähempänä kouluopetukselle tyypillisiä tehtäviä (kuten edellä mainittu geometria) sekä niitä, joiden kontekstin on tulkittu olevan "tieteellinen". Jälkimmäinen tarkoittaa useimmiten esitysmuotoa, joka on tuttu sanomalehdissä raportoitavista tutkimustuloksista.

Koska tulosten tarkastelu taulukossa 1 esitetyn pistemäärän avulla ei vielä kerro kuin suomalaiskoululaisten PISA-matematiikan osaamisen kokonaistason suhteessa muiden maiden oppilaisiin, tarkastelemme tässä tuloksia OECD-keskiarvon sijaan tehtävien ratkaisuprosenttien avulla. Vaikka varsinaiset testitehtävät jäävätkin salaisiksi, auttanee tämä jossain määrin vertaamaan suomalaisoppilaiden PISA-menestystä opetussuunnitelmaa selvemmin heijastaviin opetushallituksen arviointeihin, jos oheislukemistona käytetään OECD:n sivuilta löytyviä esimerkkitehtäviä. Käytämme myös vertailuryhmänä kaikkien OECD-maiden sijaan vain Euroopan maita, mikä tuonee tulokset hieman lähemmäs meille tunnettuja koulujärjestelmiä ja -kulttuureita. On kuitenkin huomattava, että tulokset vaihtelevat huomattavasti myös Euroopan sisällä. Esimerkiksi Pohjoismaiden ja läntisen Euroopan keskimääräinen ratkaisuprosentti on 51 %, kun se taas Mustanmeren rantavaltioissa Bulgariassa ja Romaniassa on vain 31 %.

Suomalaisoppilaat ovat ratkaisseet kaikista tehtävistä oikein keskimäärin 59 % vaihteluvälin ollessa 9 % – 98 %. Kaikilta osin ei kuitenkaan ole helppoa eritellä, mikä on tehnyt jotkin tehtävät oppilaille muita vaikeammiksi tai helpommiksi. Menestykseen näyttävät vaikuttavan niin tehtävätyyppi (monivalinta / avovastaus) ja tehtävänannon selkeys kuin varsinainen tehtävän vaatima matemaattinen päättely tai raaka laskeminen. Esimerkiksi "epävarmuus"-alueen 11 tehtävästä peräti 8 on monivalintatehtävää, kun taas "muutos ja suhteet"-alueen 13 tehtävästä 7 vaativat avovastauksen. Tehtävätyypin osalta oppilaat ovat menestyneet selvästi heikoimmin niissä tehtävissä, joissa heitä on pyydetty perustelemaan vastauksensa (44 %) – vaikka siis useimmissa tehtävissä on lopulta hyväksytty myös pelkkä vastaus.

Tehtäväsisällön mukaan tarkasteltuna lähes joka ryhmästä löytyy niin huomattavan tasaisesti ja hyvin osattuja tehtäviä kuin selvästi vaikeammaksi osoittautuneita. Tämä saattaa kuitenkin heijastaa ennemminkin tehtävänantoon tai vastaustyyppiin liittyviä tekijöitä kuin oppilaiden taitoja kyseisellä matematiikan osa-alueella. Parhaiten on osattu funktioiden alueelle ja numeraalisiksi luokitellut tehtävät (71 % ja 67 %), jotka ovat usein monivalintaan tai lyhyeen vastaukseen perustuvia. Heikoimmin osattiin testin ainoa algebran tehtävä (9 %) sekä "diskreetin-" ja tilastomatematiikan piiriin luetut tehtävät (51 % ja 54 %). PISA:n oma sisällöllinen luokittelu näyttää löytävän suomalaiskoululaisten osaamisen rakenteen yleisiä matematiikan alueita paremmin ainakin tulosten tasasuuden valossa. Parhaiten on osattu määrälliselle alueelle asettuvissa tehtävissä (68 %) ja heikommin alueille "tila ja muoto" sekä "epävarmuus" sijoittuvissa tehtävissä (molemmat 53 %).

Tehtävätyyppien väliset erot ovat ilmeisimmät, kun tarkastelukulmana on tehtävän vaatiman osaamisen luonne. Suomalaisoppilaiden ehdoton vahvuus on tuottamisen (*reproduction*) alueella, jolla 12 tehtävän keskimääräinen ratkaisuprosentti on peräti 81 %. Tiedon yhdistämistä (*connections*) vaativat tehtävät ovat osoittautuneet jo selvästi vaikeammiksi (59 %) ja heikoimmin (42 %) on osattu tehtävissä, jotka vaativat tehtävässä annetun tiedon syvällisempää pohdintaa (*reflection*). Tämä tehtäväryhmä on kuitenkin osin tuloksiltaan heterogeeninen: siihen sijoittuu sekä tehtävä, jossa suomalaisoppilaiden ratkaisuprosentti on

83 %, että molemmat niistä tehtävistä, joiden ratkaisuprosentti jäi alle 10 %. Koulun matematiikantehtäviä lähellä oleviksi luokitelluissa tehtävissä ratkaisuprosentti on 59 % ja sanomalehtien tutkimustuloksien raportointia jäljittelevissä "tieteelliseen" kontekstiin luokitelluissa 56 %.

Tyttöjen ja poikien väliset erot

Tyttöjen ja poikien välinen ero PISA-matematiikan osaajina ei ole suuri. Yli puolet tehtävistä on sellaisia, joissa sukupuoliero jää varsin vähäiseksi, jos kriteerinä käytetään arjesta tuttua 10 % erottelukynnystä (toisen ryhmän tuloksen tulee olla vähintään 10 % parempi kuin toisen). Pojat ovat tyttöjä parempia 16 tehtävässä ja tytöt poikia parempia viidessä. Poikien paremmuus osuu usein keskimääräistä vaikeammaksi osoittautuneisiin tehtäviin, ja ero on heidän kohdallaan yleensä suurempi (30 % vs. 17 %). Tehtävätyypin mukaan tarkasteltuna poikien paremmuus on ilmeisintä kompleksisissa monivalintatehtävissä ja avointa vastausta vaativissa tehtävissä. Tytöt taas menestyvät poikia paremmin usein lyhyttä avovastausta vaativissa tehtävissä.

Tehtäväalueittain tarkasteltuna poikien paremmuus on erityisen selvää testin ainoassa algebran tehtävässä (13 % vs. 7 %) sekä tilastollisissa tehtävissä, mutta se on ilmeistä myös funktioiden ja geometrian kohdalla. Tytöt myös osoittautuivat poikia paremmaksi vain yhdessä "muodon ja tilan" alueelle osuvasta 11 tehtävästä, kun pojat ovat tyttöjä parempia neljässä. "Muutoksen ja suhteiden" 13 tehtävän kohdalla vastaava suhde on tyttöjen yksi vs. poikien viisi paremmin osattua tehtävää. "Määrän" alueelle lukeutuvissa tehtävissä tytöt ovat poikia useammin parempia (3 : 1), mutta valtaosassa ryhmään kuuluvista tehtävistä eroa ei ole tai se jää alle tässä kriteerinä käytetyn 10 % rajan. Sukupuoliero on selvin tilastolaskujen tai todennäköisyyden alueille sijoittuvien "epävarmuus" -tehtävien kohdalla, missä pojat ovat tyttöjä parempia peräti kuudessa tehtävässä yhdestätoista ja ero on keskimäärin yli 30 %.

Suomalaisoppilaille helpommiksi osoittautuneista "tuottamistehtävistä" vain yhdessä on 10 % kriteerin ylittävä sukupuoliero (tytöt 64 %, pojat 58 %). "Yhteyksien" käsittelyä vaativasta 23 tehtävästä pojat ovat ratkaisseet tyttöjä useammin oikein seitsemän ja tytöt poikia useammin kaksi (ero poikien kohdalla 20 %, tyttöjen 10 %). Vaativimmista pohdintaa vaativista tehtävistä (*reflection*) vain kahdessa kolmestatoista tehtävästä ei ollut sukupuolieroa. Poikien tulos oli tyttöjä parempi yhdeksässä tehtävässä (ero keskimäärin 37 %) ja tyttöjen poikia parempi kahdessa (ero 27 %). Pojat menestyivät tyttöjä paremmin myös kolmessa seitsemästä "koulukontekstiin" sijoittuvasta tehtävästä, kun taas "tieteelliseen" kontekstiin sijoittuvissa molemmat olivat toisiaan parempia kahdessa ryhmän 12 tehtävästä.

Yrittäminen

Eräs suomalaiskoululaisten menestykselle tyypillinen ja sitä tukeva piirre kaikilla PISA-tutkimuksen osa-alueilla ja kaikilla tutkimuskerroilla on ollut vastaamatta jätettyjen osioiden vähäinen määrä (7 %). Vain Alankomaissa ovat oppilaat ainakin nyt vuoden 2006 matematiikan tehtävissä olleet vielä selvästi tunnollisempia vastaajia (vain 4 % jätetty vastaamatta). Vastaamatta jättäminen on ainakin suomalaisoppilailla selvä indikaattori vaikeaksi koetusta tehtävästä. Siinä missä vastaamattomuus jää helppojen numeraalisten tehtävien kohdalla usein alle yhden prosentin (27 % kaikista tehtävistä), on se muutaman vaikeimman – tai sellaiselta näyttävän – tehtävän kohdalla yli 20 %. Näyttää siis siltä, että yksi suomalaisoppilaiden vahvuus on suhteellisen peloton tarttuminen uudenlaisiin tehtäviin – kunhan ne eivät näytä liian "matemaattisilta".

Loppupohdinta

Suomi on nyt kolmannen kerran pysynyt kärjessä PISA-vertailussa. Muut maat pyrkivät parhaansa mukaan suuntaamaan ja kehittämään omaa kouluopetustaan tavalla, joka tukisi heidän menestystään tässä ehdottomasti tärkeimmäksi nousseessa kansainvälisessä vertailussa. Tähän liittyvät myös monet ulkomaisten asiantuntijaryhmien vierailut Suomessa tutustumassa meikäläisen kouluopetuksen toteutukseen. Jos Suomen halutaan pysyvän johtoasemassa myös jatkossa, olisi myös meidän kehitettävä edelleen (tehostettava) koulumatematiikan opetusta ja osaamista etenkin niillä osa-alueilla, joilla suomalaisten koululaisten osaaminen on ollut ja on myös nyt suhteellisesti heikointa. Tällaisia ovat muun muassa syvällisempää pohdintaa ja vastauksen matemaattista perustelemista vaativat tehtävät. Matematiikan opetuksessa olisi siis kiinnitettävä entistä enemmän huomiota oppilaiden matemaattisen ajattelun ja ymmärryksen parantamiseen ja edistämiseen.

Vaikka suomalaiset oppilaat ovat olleet huipputasoa kaikissa kolmessa PISA-vertailussa (2000, 2003, 2006), niin myös parhaiden oppilaiden matemaattisissa tiedoissa ja erityisesti matemaattisessa ajattelussa näyttää olevan vakavia puutteita. Tämä tulee näkyviin sekä edellä esitetyissä PISA-tehtävien tuloksissa että aiemmissa tutkimuksissa, joilla on pyritty selvittämään esimerkiksi lukukäsitteen ymmärtämisen tasoa niin oppilaiden (ks. Hannula & al. 2006, Hellinen & Pehkonen 2008) kuin opettajiksi opiskelevien joukossa (ks. Merenluoto & Pehkonen 2002). Myös yleisemmässä käsitteellisessä ymmärtämisessä ja matemaattisessa ajattelussa on tutkimuksessa havaittu joillakin oppilailla olevan suuria puutteita (ks. Huhtala 2000). Samoin Merenluodon (2001) tulokset lukiolaisten käsitteellisestä muutoksesta matematiikassa viittaavat selkeästi puutteelliseen siirtymään luonnollisista luvuista reaalilukuihin; mm. oppilaat pyrkivät siirtämään luonnollisille luvuille ominaisen seuraajan käsitteen myös reaalilukuihin (vrt. myös Merenluoto & Pehkonen 2002).

Menestys kansainvälisessä vertailussa ei tietenkään ole itseisarvo, joten myös PISA-tehtäviin ja -tuloksiin on syytä suhtautua kriittisesti. PISA-tutkimuksen teoreettisessa viitekehyksessä ovat kuitenkin vahvasti näkyvissä monet sellaiset tavoitteet, jotka on kirjattu suomalaiseen opetussuunnitelmaan jo peruskoulun alkuvuosista lähtien (vrt. Anon. 1970). Tilanne ei ole tältä osin muuttunut, ja nykyisen opetussuunnitelman puitteissa voitaisiin hyvin käyttää koulumatematiikan opetuksessa taitavasti kompleksisia "PISA-tyyppisiä" ongelmatehtäviä oppilaiden ymmärtämisen edistämiseksi ja sen tason nostamiseksi. Tällöin on ensisijaisen tärkeää opettajien herkistyä oppilaiden ajattelulle, ts. koettaa ymmärtää ja sisäistää se, miten oppilaat ajattelevat ja ymmärtävät matematiikkaa. Näin voitaisiin kiinnittää paremmin huomiota niihin keinoihin, joilla opettajat voivat edistää oppilaiden ymmärtämisen kehittymistä. Tällaisia menetelmiä ovat esim. mietintäajan antaminen ongelmatehtävissä oppilaille (osa tehtävästä kotiin mietittäväksi), ratkaisukeinoista keskusteleminen sekä pienryhmissä että koko luokan puitteissa ja ennen kaikkea oppilaiden aito kuunteleminen, jossa paneudutaan ymmärtämään oppilaiden omaa ajattelua.

Lähteet

Anon. 1970. *Peruskoulun opetussuunnitelmakomitean mietintö I. Opetussuunnitelman perusteet.* Komiteanmietintö 1970: A 4. Helsinki: Valtion painatuskeskus.

Anon. 2008. Suomen hyvät PISA-tulokset eivät yllättäneet. *Etusivu opetusministeriön verkkolehti* (14.1.08): http://www.minedu.fi/etusivu/arkisto/2008/1001/kvpisa.html

Arinen, P. & Karjalainen, T. 2007. *PISA 2006 ensituloksia: 15-vuotiaiden koululaisten luonnontieteiden, matematiikan ja lukemisen osaamisesta.* Opetusministeriön julkaisuja 2007:38

Astala, K., Kivelä, S.K., Koskela, P., Martio, O. Näätänen, M. & Tarvainen, K. 2005. PISA-tutkimus vain osatotuus suomalaisten matematiikan taidoista. *Matematiikkalehti SOLMU* 1/2005, 4–5.

Blum, W., Drüke-Noe, Chr., Hartung, R. & Köller, O. 2006. *Bildungsstandards Mathematik: konkret. Sekundarstufe I: Aufgabenbeispiele, Unterrichtsanregungen, Fortbildungsideen.* Berlin: Cornelsen.

Hannula, M.S., Pehkonen, E., Maijala, H. & Soro, R. 2006. Levels of students' understanding on infinity. *Teaching Mathematics and Computer Science* 4 (2), 317–337.

Hellinen, A. & Pehkonen, E. 2008. On high school students' problem solving and argumentation skills. Will be published in: *Proceedings of the ProMath Workshop in Lüneburg* (ed. T. Fritzlar). Verlag Franzbecker.

Huhtala, S. 2000. *Lähihoitajaopiskelijan oma matematiikka.* Helsingin yliopisto. Opettajankoulutuslaitos. Tutkimuksia 219.

Kupari, P. & Välijärvi, J. (toim.) 2005. *Osaaminen kestävällä pohjalla – PISA 2003 Suomessa.* Jyväskylä: Gummerus.

Lavonen, J. 2008. PISA 2006 -tutkimuksen tuloksia: luonnontieteiden osaaminen ja kiinnostavuus. *Dimensio* 72 (1), 22–31.

Merenluoto, K. 2001. *Lukiolaisen reaaliluku. Lukualueen laajentaminen käsitteellisenä muutoksena matematiikassa.* Väitöskirja. Turun yliopisto, Ser. C 176.

Merenluoto, K. & Pehkonen, E. 2002. Elementary teacher students' mathematical understanding explained via conceptual change. In: *Proceedings of the PME-NA XXIV* (eds. Mewborne, D., Sztajn, P., White, D.Y., Wiegel, H. G., Bryant, R. L. & Nooney, K.), 1936–1939. Columbus (OH): ERIC.

OECD 2006. *Assessing Scientific, Reading and Mathematical Literacy: A Framework for PISA 2006.* Paris: OECD.

Pehkonen,E. & Seppälä, R. 2007. Muutostekijöitä suomalaisessa matematiikanopetuksessa, erityisesti vuosina 1970-2000. *Kasvatus-lehti* 38 (1), 42–50.

Välijärvi, J. & Linnakylä, P. (toim.) 2002. *Tulevaisuuden osaajat – PISA 2000 Suomessa.* Jyväskylä: Oma Oy. ■

Korjaus Pulmasivu 1/2008

Tehtävässä kolme kertomien tulo $6! \cdot 7! = 10!$ eikä $100!$ niin kuin tekstissä väitettiin.

Samoin saman tehtävän vastauksen tulee olla $4! = 2! \cdot 2! \cdot 3!$

Konkretisoinnin voima – *työpajaterveisiä Maolin syyspäiviltä*

KARIN KAIRAVUO ja **EIJA VOUTILAINEN**

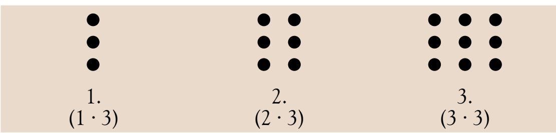
Työpajojemme tavoitteena oli antaa esimerkkejä siitä, miten toiminnallisilla työtavoilla ja konkreettisilla välineillä voi orientoitua uusiin käsitteisiin, katsoa jo opittua uudesta näkökulmasta sekä vahvistaa ja syventää ymmärtämistä.

Eijan työpajassa otsikolla **” Mikä ihmeen *x*?”** tutustuttiin välineillä tuettuihin tehtäväsarjoihin, joilla muuttujan käyttö pyritään saamaan ymmärrettäväksi. Yksi teemoista oli muuttujan käyttäminen säännönmukaisuuden ilmaisemisessa. Tehtäväsarja **”Lukujonoja ja kuvioita”** liittyi tähän teemaan. Se on laadittu peruskoulun syventäväksi tehtäväksi, mutta jokainen a-kohta soveltuu myös heikommin suoriutuville. Sama tehtäväsarja on käyttökelpoinen varmasti myös lukiossa.

Lukujonoja ja kuvioita

Esimerkki:

Lukujonon 3, 6, 9, … lukuja voidaan havainnollistaa kuvioilla niin, että kuviojonosta näkee, että kyseessä ovat kolmella jaolliset luvut.



Tehtävä 1.

a) Perustele kuvioilla, miksi lukujonon 2, 4, 6, 8, … lukuja sanotaan parillisiksi.
b) Mikä on a-kohdan lukujonon sadas luku? Entä luku, jonka järjestysluku on n?
c) Kuinka mones lukujonon luku on 2002?

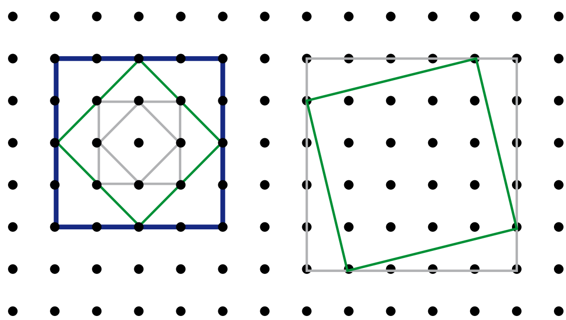
Tehtävä 2.

a) Perustele kuvioilla, miksi lukujonon 1, 3, 5, 7, … lukuja sanotaan parittomiksi.
b) Mikä on a-kohdan lukujonon sadas luku? Entä luku, jonka järjestysluku on n?
c) Kuinka mones a-kohdan lukujonon luku on 501?

Tehtävä 3.

a) Perustele kuvioilla, miksi lukujonon 1, 4, 9, 16, … lukuja sanotaan neliöluvuiksi.
b) Mikä on a-kohdan lukujonon yhdestoista luku? Entä luku, jonka järjestysluku on n?
c) Kuinka mones a-kohdan lukujonon luku on 12321?

Karinin työpajan otsikkona oli:
”Apua! Matikka jarruttaa”. Työpajassa tutustuttiin lukion tukikurssin sisältöihin ja työtapoihin. Teemoina olivat pinta-ala, neliöjuuri, Pythagoraan lause, trigonometria ja suora koordinaatistossa. Välineenä näiden kaikkien konkretisoinnissa oli geolauta. Neliön pinta-alaa, sivun pituutta ja neliöjuuren käsitettä havainnollistettiin seuraavalla tehtävällä: ”*Rajaa geolaudalle neliö, jonka pinta-ala on 16 ruutua. Rajaa äskeisen neliön sisälle neliö, jonka pinta-ala on puolet edellisen neliön pinta-alasta. Jatka näin niin kauan kuin se on mahdollista. Tee sitten taulukko, jonka toisena sarakkeena on neliön pinta-ala ja toisena neliön sivun pituus.*”



Kuva 1. *Vasemmanpuoleinen yllä olevista kuvista liittyy esitettyyn tehtävään, mutta kuinka oikeanpuoleinen tehtävä liittyykään lukuun* $\sqrt{17}$ *?*

Sokerina pohjalla Karin esitti syksyn 2007 pitkän matematiikan ylioppilaskoetehtävän:

” *Osoita, että luku* $n^3 - n$ *on jaollinen luvulla 6, kun* n *on luonnollinen luku*”

Tehtävä on kaunis mutta osoittautui monelle oppilaalle vaikeaksi. Ratkaisun ensimmäinen vaihe $n^3 - n = n \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n + 1) \cdot (n - 1)$ onnistui yleensä. Toinen vaihe $(n - 1) \cdot n \cdot (n + 1)$ enteili jo ratkaisua, mutta johtopäätöksen tekeminen ei välttämättä onnistunut. Oppilaat kyllä tiesivät, että joka toinen

Kuva 2.

luonnollinen luku on parillinen eli jaollinen kahdella. Toblerone–rasian (Kuva 2) ympärille kierretty peräkkäisten luonnollisten lukujen lukunauha näyttää mielenkiintoisella tavalla sen tosiasian mitä edellisestä vaiheesta vielä puuttuu: Kolmesta peräkkäisestä luonnollisesta luvusta yksi on aina jaollinen kolmella. Joten koska $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ on kolmen peräkkäisen luonnollisen luvun tulo, sen luvuista yksi on jaollinen kolmella ja ainakin yksi on jaollinen kahdella, joten tulo on jaollinen kuudella.

P.S. Karin tutustui ja ihastui Toblerone-ideaan syksyllä 2000 kurssilla, jonka opettajina toimivat unkarilaiset Neményi Eszter ja Szendrei Julianna. ■

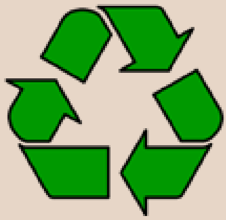
Listing 200 vuotta

Kari Mikkola

Johann Benedict Listing syntyi Frankfurt am Mainissa 25.7.1808 ja kuoli Göttingenissä 24.12.1882. Hän oli Gaussin oppilas ja työtoveri toimien fysiikan professorina Göttingenissä. Listing kehitti ensimmäisenä matematiikan termin topologia ja ansaitsee jo siksikin tämän kirjoituksen, mutta kokonaisuudessaan Listingin saavutukset ovat paljon laajempia. Saavutustensa ja suhteellisen tuntemattomuutensa perusteella häntä voitaisiin kutsua unohdetuksi tieteen suurmieheksi.

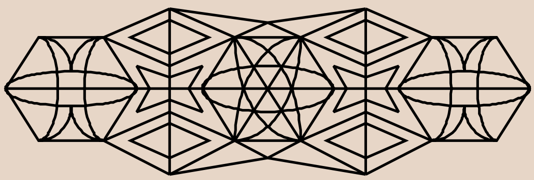
Listing voitaisiin muistaa esimerkiksi maapallon muodon geoidiksi nimeämisestä. Vuonna 1858 heinäkuussa hän keksi ns. Möbiuksen nauhan muutama kuukausi ennen Möbiusta ja myös julkaisi löytönsä Möbiusta ennen. Hän käytti miljoonasosille nimitystä mikron ja tutki sokerin määritystä diabeetikon virtsasta. Fysiologisessa optiikassa tunnetaan Listingin laki liittyen silmän kääntymiseen. Hän määritteli lukuisia optiikan ja matematiikan termejä. Listing myös yleisti Eulerin monitahokaskaavan. Hänen työtään voidaan pitää solmuteorian alkuna.

Listing oli lisäksi taitava piirtäjä. Hän piirsi töihinsä kauniita kuvia elävöittämään teoksiaan. Esimerkiksi Listingin piirtämiä kuvia opettajastaan Gaussista on löydettävissä internetistä hakusanoilla ”Gauss + Listing”. Vuoden 1847 teos *Vorstudien zur Topologie* oli ensimmäinen julkaisu, jossa esiintyi termi *topologia* Riemannin ja Gaussin käytämän *analysis situs* -termin sijasta. Listing oli käyttänyt topologia-termiä jo aiemmin vuodesta 1836 kirjeenvaihdossaan entisen opettajansa kanssa.



Kuva 1. Kierrätysmerkki on Möbiuksen nauha, vai pitäisikö sanoa ”Listingin nauha”.

Kuva 2. on em. teoksesta. Tämä kuvio voidaan piirtää yhdellä viivanvedolla.



Kuva 2. Yhdellä viivanvedolla piirrettävä Listingin kuvio.

Mikäli Jaakon päivän kylmien kivien heittelyn seuraaminen uimarannalla kyllästyttää, syntymäpäiväsankarin 200-vuotisjuhlien (ja ”Listingin nauhan” 150-vuotisjuhlien) kunniaksi rannan hiekalle voi piirtää kyseisen kuvan, yhdellä kepinvedolla tietenkin.