

# Dimensio

Matemaattis-  
luonnontieteellinen  
aikakauslehti  
71. vuosikerta  
2/07



Irtonumero 10 €

- 5** Pääkirjoitus  
*Irma Iho*
- 6** Mekaaniset pulmat ja matematiikka  
*Kaisa Vähähyyppä*
- 10** Fysiikan ja kemian ryhmäkoot peruskouluissa suurennuslasin alla  
*Jouni Björkman*
- 12** Hattulan silloilta  
*Jukka O. Mattila*
- 14** Luokanopettajankoulutuksen kemiaa  
*Jarkko Lampiselkä ja Kalle Juuti*
- 19** Idealähtöistä koulualgebraa  
*Seija Hassinen*
- 22** Peruskoulun matematiikkakilpailu  
*Hannu Korhonen*
- 26** Sudokuja ratkomassa Kaliningradilaisessa mökissä  
*Kari Mikkola*
- 29** Itämeren fysiikka, ekologia ja tulevaisuus  
*Matti Leppäranta*
- 30** Ett år som Heureka-lärare  
*Herman Norrgrann*
- 32** Seminarium i Innovationer och "C"reativitet - SIC  
*Sanna Vuori och Ann Charlotte Rydgren*
- 37** Matematiikkaa molemmille aivopuoliskoille  
*Maija Salmela*
- 40** ABB piti soveltavan matematiikan tietoisuuden lukion numeerisen matematiikan opiskelijoille  
*Marjut Ojala*
- 44** Tietokonepelit ammatillisen koulutuksen apuvälineinä  
*Birgitta Mannila ja Kimmo Oksanen*
- 50** Koulutukselliset haasteet ja mahdollisuudet Arcadan muovitekniikan koulutusohjelmassa  
*Mikael Paronen*
- 53** Kokeellinen kotitehtävä  
*Pasi Ketolainen*
- 56** Tutkija Veli-Matti Vesterinen hehkuttaa kemian filosofian puolesta  
*Miika Vähämaa*
- 58** Fysiikan loppukilpailuraportti 2007  
*Pasi Ketolainen*
- 59** Viisi puolustuslinjaa ilmastonmuutosta vastaan  
*Risto Isomäki*
- 62** Kirjallisuutta: *John Derbyshire: Alkulukujen lumoissa*
- 63** Vuoden opettaja: Kustannustehokkuutta  
*Lea Karkela*
- 65** Demonstraatio kemian kurssiin 2  
*Lea Karkela*
- 66** MAOL ry tiedottaa
- 67** Pulmasivu

Kansikuva *Timo Suwanto: Ennuste tuleville talville: lunta on vähemmän, variksia enemmän ja auringonlaskut ovat punaisempia.*

JULKAISIJA:  
Matemaattisten Aineiden  
Opettajien Liitto MAOL ry  
Rautatietäisenkatu 6, 00520 Helsinki

PÄÄTOIMITTAJA  
Leena Mannila  
Puh. 050 367 3421

VASTAAVA PÄÄTOIMITTAJA  
Irma Iho  
Puh. 050 302 1589

TOIMITUSSIHTEERI:  
Jarkko Narvanne  
Puh. 050 523 2768  
dimensio@maol.fi

PAINO:  
Forssan Kirjapaino Oy  
ISSN 0782-6648  
ISO 9002

TILAUKSET JA  
OSOITTEENMUUTOKSET:  
MAOL:n toimisto  
Puh. (09) 150 2338

TILAUSHINTA:  
Vuosikerta 40 €, irtonumero 10 €, ilmestyy 6 numeroa vuodessa

TOIMITUSKUNTA:  
Leena Mannila, pj.,  
Kalle Juuti, Pasi Ketolainen, Jari Koivisto, Hannu Korhonen, Marika Nieminen, Juha Oikkonen, Marjut Ojala, Kaisa Vähähyyppä, Maria Vänskä, Maija Rukajärvi-Saarela, Jarkko Narvanne, siht.

NEUVOTTELUKUNTA:  
prof. Maija Ahtee  
FT Maija Aksela  
op.neuvos Marja Montonen  
prof. Kaarle Kurki-Suonio  
prof. Aatos Lahtinen  
prof. Ilpo Laine  
prof. Tapio Markkanen  
rehtori Jukka O. Mattila  
prof. Esko Valtaoja  
prof. Erkki Pehkonen  
joht. Kari Purhonen  
prof. Pekka Pyykkö  
prof. Jorma Merikoski  
toim.joht. Hannu Vornamo



# Jäsenten asialla

Posti kuljetti vuodenvaihteen jälkeen jäsenmaksulaskun. Siinä vaiheessa moni miettii mitä muuta viidelläkymmenelläviidellä eurolla saa kuin MAOL:n jäsenyyden. Saahan sillä esimerkiksi melkein tankkilisen bensiniä.

Jäsenyys on varmasti hintansa väärti. Osa maksusta on lukijan edessä Dimension muodossa. Suurten muutosten aikana MAOL:in valtakunnallinen toiminta korostuu ja se on ollut tuloksellista. Jälki on näkynyt esimerkiksi perusopetuksen tuntijaossa, sekä perusopetuksen että lukion opetus suunnitelmassa ja ylioppilastutkinnon uudistamisessa. Kaikkea ei ole saavutettu, mutta voi vain kuvitella, mikä olisi tilanne ilman MAOL:in asiantuntemusta.

Monet tärkeät opetusta koskevat päätökset tehdään kuntien ja yksittäisten koulujenkin tasolla. Tämän takia pedagogisen järjestön rooli korostuu jäsenistön tukena ja parhaimmillaan neuvonantajana. Kuntatasolla paikalliskerhot ovat merkittäviä vaikuttajia. Liiton haasteena onkin tällä hetkellä, miten pitkäaikaiset kerhojen puheenjohtajat ja muut hallituksen jäsenet saataisiin jaksamaan ja mistä löytyisi tuoreempia voimia heidän rinnalleen ja työn jatkajiksi. Hätähuutojakin on kuulunut kentältä.

Paikalliskerhot, joita on tällä hetkellä 37, toimivat hyvin erilaisissa olosuhteissa. Pienimmän kerhon jäsenmäärä on 8 ja suurimman 392. Toisen kerhon jäsenille 20 km on pitkä matka kerhon tilaisuuteen, toisilla 200 km on pieni pyrhähdys. Onneksi sähköinen viestintä on tullut avuksi, mutta kokoontumisilla on omat hyvät puolensa. Voi puhua sellaisistakin iloista ja huolenaiheista, joita ei viitsi laittaa kirjoitettuna eteenpäin. Viihteellistä puoltakaan ei sovi vähätellä.

Mitä tukea MAOL tarjoaa kerhoille tällä hetkellä? Jäsenmaksusta osa palautetaan kerhoille, joten nollabudjetilla ei tarvitse toimia. Kerhoavustusta voi anoa vielä erikseen tilaisuuksien järjestämistä varten. Kerhon tilaisuuksiin voi pyytää hallituksen jäseniä tai toiminnanjohtajaa. Yhtiön tuote-esittelyistä ja tuotekoulutuksista voi sopia. Liitolta saa apua

myös kouluttajien löytämiseksi. Toimistoon voi soittaa ja toiminnanjohtajan lisäksi kaksi yhtiön ja kaksi liiton toimihenkilöä vastaa hyvinkin monenlaisiin kysymyksiin. Liiton sivuja on uudistettu ja uudistetaan edelleen, jotta ne entistä enemmän palvelisivat jäsenkuntaa.

Kuun lopulla kerhojen edustajat osallistuvat liittokokoukseen ja kerhojen neuvottelupäiville. Lisäksi MFKA:n tuotekoulutus antaa vinkkejä kouluopetuksen arkeen. Jäsenet voivat tuoda ideoita tullessaan tai tulla vain kuuntelemaan. Kerhotoimikunnalle voi lähettää etukäteenkin viestiä. Toivotaan vuorovaikutteista tilaisuutta, jossa aineitoimikunnat ja kerhojen edustajat vaihtavat kuulumisia. Laadukas jäsenpalvelu on toimintavuoden ykkösasioita.

Suurten kasvukeskusten väkimäärä kasvaa ympäristökuntien kustannuksella. Sama ilmiö näkyy kerhojen jäsenmäärissä ja pienet kerhot ovat jo vaikeuksissa. Eri kerhojen välisestä yhteistyöstä löytyy varmasti apua. Olisiko myös kerhorajojen tarkistuksella tilausta, ei tietenkään Helsingin ja Sipoon malliin vaan omasta kerhojen yhteisestä tahdosta lähtien.

Kerhotoiminnalla on tilausta jatkossakin. Pienissä kouluissa matematiikan, fysiikan, kemian ja tietotekniikan opettaja on melko yksin. Yhtenäiskouluratkaisut hiertävät ja tunneista ja ryhmäkokoon liittyvistä asioista joutuu käymään taistelua. Ylioppilastutkinto on uudistunut viime vuosina sellaisella vauhdilla, johon ei ole totuttu. Erityisopetus on lisääntynyt niin lukiossa kuin peruskoulussakin. Suurissa kouluissa on työrauhaongelmia. Kerho on kokoava tekijä ja viestintä välittäjä kuntatason päättäjille. Kerhoja kuunnellaan, kerhot edustavat alueensa kaikkia matemaattisluonnontieteellisten aineiden opettajia yli kuntarajojen, joten yhteinen kannanotto on vahva vaikuttaja. Lisäksi monilla alueilla varsinaista ammatillista koulutusta meidän omissa oppiaineissa ei järjestä kuin MAOL-kerho. Kukaan muu kuin matematiikan, fysiikan ja kemian ja tietotekniikan opettaja ei ymmärrä näiden aineiden opetuksen luonnetta ja tärkeyttä.

# Mekaaniset pulmat ja matematiikka

**KAISA VÄHÄHYYPÄ**, asiantuntijayksikön päällikkö, Opetushallitus

**Mekaaninen pulma on yhdestä tai useammasta osasta koostuva esine, johon sisältyy jokin ratkaisu- tai ongelmaväline, johon sisältyy jokin ratkaisu- tai ongelmaväline, johon sisältyy jokin ratkaisu- tai ongelmaväline. Miten esine hajotetaan osiin, miten osista kootaan haluttu hahmo tai kuvio, miten esine aukaistaan tai miten se suljetaan? Mekaanisista pulmista käytetään usein nimitystä pulmalelu, koska mekaaniset pulmat on tehty ajanvietteeksi. Pulman ratkaisemisen avaimena saattaa olla näppäryys ja kätevyys, mutta aina olennainen osa ratkaisua on myös kärsivällisyys ja sen myötä oivallus.**

Tutuin mekaaninen pulma on varmaan pirunnyrkki, vanha perinteinen ajanvietteeksi tarkoitettu esine. Yksinkertaisin pirunnyrkki muodostuu kuudesta palasta jotka oikein aseteltuna lukkiutuvat toisiinsa siten, että ”nyrkin” aukaiseminen on oma pulmansa sekkin. Suurimmissa pirunnyrkeissä saattaa olla kymmeniä paloja. Sellaisen suunnittelu on valtava taidonnäyte ja kokoamiseen on varattava aikaa päiviä, jopa viikkoja kokoajan kokemuksesta riippuen. Pirunnyrkkiä pidetään usein suomalaisena keksintönä, mutta vastaava rakenne tunnetaan eri puolilla maailmaa.

Pulmalelujen kansainvälisyydestä kertoo sekin, että Mongolian pääkaupungissa Ulan Batorissa on erittäin laaja pulmalelumuseo, jonka kokoelma perustuu yhden miehen työhön. Museossa vieraillee vuosittain noin 25 000 kävijää. Museon perustaja ja useimpien siellä olevien pulmien tekijä Tumen-Ulzii Zandraa kehittäli



*SPR-nyrkki.*

ja rakensi erilaisia pulmaleluja yli 40 vuoden ajan. Mongolian suljetun aseman takia, hänellä ei tuona aikana ollut mitään kontakteja muihin pulmista kiinnostuneisiin harrastajiin muualla maailmassa. Vasta vuodesta 2002 alkaen hän on päässyt ensimmäistä kertaa tapaamaan muita harrastajia pulmakerääjien vuosittaisiin kansainvälisiin tapaamisiin.

Mekaanisia pulmia on luokiteltu monin tavoin. Klassikoksi on muodostunut amerikkalaisen Jerry Slocumin ja hollantilaisen Jack Botermansin laatima kymmenluokkainen jaottelu, jota englantilaiset keräilijät Erward Hordern ja James Dalgety ovat myöhemmin täydentäneet muutamalla lisäluokalla. Pääjaottelut sisältävät vielä keskimäärin kymmenen alaluokkaa kukin. Luokitus ei suinkaan ole yksikäsitteinen, sillä moni pulmalelu voidaan perustellusti sijoittaa useampaan pääluokkaan riippuen siitä, mitä ominaisuutta tarkastellaan.

## Millaisia pulmia?

Tilantäyttämisen on hyvin yleinen mekaanisten pulmien ryhmä. Tila voi olla kaksiulotteinen pinta tai käyttää kolmea ulottuvuutta. Kaksiulotteisista pulmista tutuin ja yleisin on tavallinen palapeli, jossa

annetuista osakuvan sisältämistä paloista kootaan mallikuvan mukainen kuvakokonaisuus. Palapelin paloja voi olla jopa tuhansia, jos tavoiteltu päämäärä eli mallikuva on käytettävissä. Satoja palojakin käsittävän palapelin kokoaminen voikin olla liki mahdotonta, jos mallikuva ei olisi käytettävissä tai jos paloissa ei olisi kuvaa lainkaan.

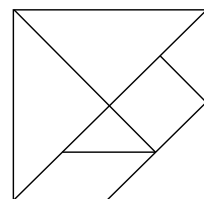
Palapelinä voidaan pitää myös Sam Loydin aikanaan esittämää ratsastajaongelmaa (Kuva 1).



*Kuva 1. Ratsastajapulma.*

Annetut palat on järjestettävä siten, että kumpikin ratsastaja ratsastaa omalla hevosellaan (muualla alkuperäisessä ongelmassa).

Vähäiselläkin palojen määrällä voidaan saada aikaan haastavia tehtäviä. Kiinnostava ja kuuluisa tehtävä on kiinalainen tangram, joka tunnetaan jo 1700-luvulta. Tangram-palat saadaan leikkamalla neliö seitsemään osan kuvan muodostamalla tavalla. (Kuva 2).



*Kuva 2. Seitsemästä tangram-palasta voi muodostaa satoja erilaisia hahmoja, vain mielikuvitus asettaa rajat.*

Neliön lisäksi paloista voidaan koota satoja muita kuvioita harjoittaen samalla hahmottamiskykyä ja mielikuvitusta:



Tangram on esimerkki leikkaustehtävästä, jossa jokin kuvio jaetaan osiin siten, että osat voidaan liittää toisiinsa mahdollisimman monella eri tavalla, jolloin alkuperäisen muodon löytäminen voi olla vaikeaa. Palojen määrän ollessa pieni, ratkaisu on toki löydettävissä kohtuullisessa ajassa myös yrityksen ja erehdyksen kautta.

Kuuluisa leikkaustehtävä on T-pulma (Kuva 3), jossa T-kirjain on leikattu neljään osaan kuvan osoittamalla tavalla. Sitä on käytetty ensimmäistä kertaa amerikkalaisen kastikkeita valmistavan yrityksen mainoksessa, nimellä ”Teaser”. Pulmassa on vain neljä palaa, mutta T-kirjaimen kokoaminen niistä on yllättävän haastava tehtävä. Syynä tähän on todennäköisesti se, että pyrimme ajattelemaan ja hahmottamaan kuvioita suorakulmaisesti ja symmetrisesti. Epäsymmetrisimmän palan sijoittaminen vinoon, vaatii hetken miettimistä ja kokeiluakin.



Kuva 3. T-pulma.

Vastaava esimerkki kolmiulotteisista palapeleistä on kahdesta palasta koottava nelitahokas (Kuva 4). Ratkaisun löytäminen kokeilemalla vie aikaa, vaikka paloja on vain kaksi. Miettimällä nelitahokkaan rakennetta ja palojen tahojen muotoa, ratkaisu selviää nopeasti. Pulmasta on lukuisia muunnelmia, joissa alkuperäiset kaksi palaa on jaettu kahteen tai neljään osaan ja siten vaikeutettu tehtävän ratkaisemista.

Kolmiulotteisista tilantäyttötehtävistä, palapeleistä, eräs kuuluisimpia on tanskalaisen Piet Heinin vuonna 1936 kehittämät Soma-kuutiot. Soma-paloja on kaikkiaan seitsemän. Jokaisessa palassa kolme tai neljä pikkukuutiota on liitetty toisiinsa eri tavoin lukuun ottamatta liitosta, jossa kuutiot muodostaisivat suoran tangon tai neliön. Paloista voidaan koota iso 3·3·3-kuutio 240 eri tavalla sekä rakentaa lukemattomia muita rakennelmia. Huolimatta siitä, että iso kuutio voidaan koota niin monella tavalla, yhdenkin ratkaisun löytäminen vie aikaa, jos käyttää vain yritys-erehdys -menetelmää. Soma-paloja voidaanankin perustellusti pitää kiinalaisen Tangramin kolmiulotteisena vastineena. Soma-palat ovat saaneet nimensä Aldoux Huxleyn kirjassa Uljas uusi maailma käytetystä huumeesta. Soma-paloilla askartelua on kerran alkuun päästyään vaikea lopettaa.



Kuva 4. Kahdesta palasta koottava nelitahokas.

Aiemmin mainittu pirunnyrkki on esimerkki lukkiutuvista pulmistä, joissa ongelma on yhtäläillä saada esine purettua osiin kuin osien kokoaminen taas yhteen. Lukkiutuvia pulmia on lukuisia erilaisia (Kuva 5). Koottu esine voi muodostaa vaikkapa erilaisia eläinhahmoja tai rakennuksia.

Jokainen voi tehdä itselleen lukkiutuvan pirunnyrkin muisuttavan pulman tyhjästä tulitikku-laatikoista tehdyistä paloista. Hollantilaisen Oskar van Deventerin keksimässä pulmassa tehtävänä on yksinkertaisesti sulkea kaikki laatikot. Vaikka palojen tekeminen on helppoa, ratkaisu ei suinkaan ole helpoimmasta päästä pulmia.

Rautalankaongelmat ovat yhtenäisen mekaanisten pulmien luokkaa. Niiden rakenne ja ratkaiseminen perustuu useimmiten topologiaan, matematiikan osa-alueeseen, joka tutkii muotojen muuttumisia.

Rautalangan ohuus verrattuna vaikkapa pirunnyrkin palikkaan sallii oikeinkin liitettyjen osien varsin vapaan kiertymisen toisiinsa nähden.

Rautalankaongelmiin luetaan usein myös erilaiset narupulmat, joiden taipuisuus mahdollistaa osien erilaisen käsittelyn.

Pulmia ovat myös erilaiset pulma-astiat: miten niihin saadaan neste tai miten se saadaan pois. (Kuva 6). Kuvan esine on



Kuva 5. Lukkiutuva ongelma.

matemaattiselta nimeltään Kleinin pullo, keksijänsä Felix Kleinin mukaan. Varsinainen Kleinin pullo on neliulotteinen kappale, jolla on vain yksi pinta, siis Möbiuksen renkaan vastine neliulotteisessa avaruudessa. Kleinin pullossa ongelma on selivttää astian rakennetta. Kuvan esine on varsinaisen Kleinin pullon projektio meidän kolmiulotteiseen maailmaamme.

Suuren yleisön tietoisuuteen mekaaniset pulmat tulivat 1970-luvun lopulla valtaisan suosion saaneen Rubikin kuution myötä. Kuutiosta voidaan perustellusti käyttää myös nimitystä Nicholisin kuutio, koska amerikkalainen Larry Nichols kehitti tahollaan vastaavanlaisen kuutiorakenteen. Kuutio kuuluu siirtosarjatehtäviin, joissa osien liikuttelu täytyy tehdä tietyssä järjestyksessä ratkaisuun pääsemiseksi.

Eräs vanhimmista siirtosarjapulmista on Sam Loydin kehittämä kuuluisa 15-peli, josta on lukuisia muunnelmia. Katoamistehtävät, taittelut, mahdottomat esineet ja lukuisa määrä luokittelemattomia pulmia kuuluvat pulmaharrastajan maailmaan.

## Mekaaniset pulmat ja matematiikka

Useimpien pulmien ratkaisemisessa on hyötyä matemaattisesta ajattelusta ja geometrisesta hahmottamisesta. Toisaalta mekaanisten pulmien ratkaiseminen kehittää hah-



Kuva 6. Kleinin pullo.

mottamiskykyä ja ongelmanratkaisutaitoa, joista taas on hyötyä myös matematiikan opiskelussa koulussa ja matemaattisen ajattelun kehittymisessä.

Hollantilainen aviopari Pierre ja Dina van Hiele kehittivät 1950-luvulla teorian geometrisen ajattelun kehittymisestä luonnehtimalla prosessin vaiheita (ns. van Hielen tasot) Geometrisen ajattelu kehityy van Hielen mukaan seuraavien tasojen mukaisesti: visualisointi, ominaisuuksien analysointi, ominaisuuksien järjestäminen, päättely ja geometrian rakenteen ymmärtäminen. Myöhemmin tämän pohjalta on tehty konkreettisempi jaottelu. 1980-luvun alussa Hoffer kehitti konkreettisemmän jaottelun, jonka tasoja voidaan kutsua geometrian ymmärtämisen tasoiksi: hahmottaminen, sanallinen kuvaaminen, piirtäminen, päättely ja soveltaminen.

Selvää on, että mekaanisten pulmien ratkomisen parantaa hahmottamiskykyä. Ratkaisussa on oleellista tarkastella esinettä tai paloja useasta eri suunnasta, verrata osien kokoa ja muotoa toisiinsa. Motivoivan tekemisen myötä kuvat ja muodot jäävät mieleen ja ne osataan paremmin yhdistää formaalin geometrian opiskeluun koulussa. Hahmottamisen jälkeen on tärkeää pystyä kuvaamaan sanallisesti kappaleen muoto. Ratkaisun selostaminen toiselle sanoin ja kuvin tai vaikkapa oman pulman tekeminen piirtämällä kehittää valmiuksia siirtyä seuraaville tasoille geometrian ymmärtämisessä.

Vaikka useat pulmat ratkeavatkin yrityksen ja erehdyksen menettelmällä, päättelystä on huomattava apu ainakin ratkaisun löytymisen nopeuttajana. Mekaaniset pulmat ovat matematiikan opetuksen oivia apuvälineitä ja muutama

mekaaninen pulma tulisi kuulua jokaisen opettajan tai luokkahuoneen perusvälineistöön. Geometrian lisäksi pulmat tarjoavat kiehtovan kentän myös muille matematiikan osa-alueille. Ratkaisu- vaihtoehtojen määrän laskeminen vaikkapa Soma-paloista tehtävälle kuutiolle, tarjoaa jo haastetta Rubikin kuution vaihtoehtojen laske- misesta puhumattakaan.

Pulmat tarjoavat harrastajalleen älyllisiä haasteita. Pulmaa on vaikea jättää käsistään ennen kuin ratkaisu on löytynyt tuoden samalla oivaltamisen iloa. Kokeile Sinäkin! ■



Pulmakannu.



Jättikokoinen Rubikin kuutio.

Tekniikan museossa on esillä yli 1000 mekaanista pulmaa, joista osaa pääsee itse kokeilemaan.

Näyttely Pulmallistako? on avoinna 6.1.2008 saakka.

Esimerkiksi tämän jutun kuvat ovat tästä näyttelystä.

[www.tekniikanmuseo.fi](http://www.tekniikanmuseo.fi)